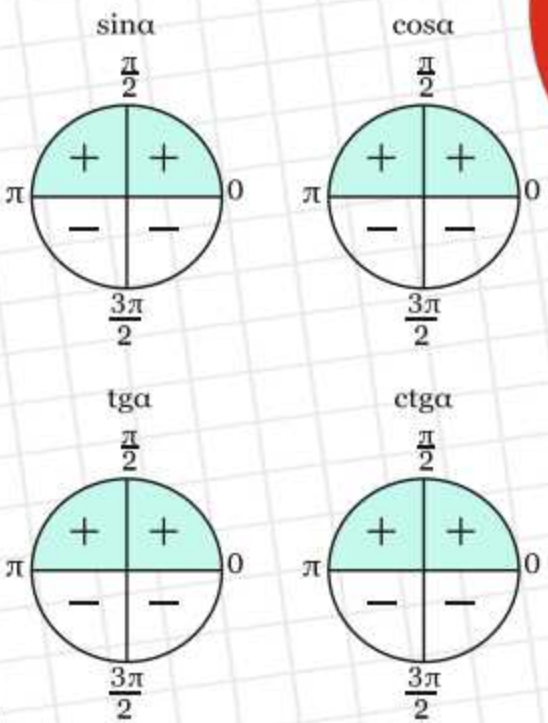
АЛГЕБРА

Часть 1

10



ИЗДАТЕЛЬСТВО МЕКТЕП

А. Е. Абылкасымова, Т. П. Кучер,
В. Е. Корчевский, З. А. Жумагулова

АЛГЕБРА

Часть 1

Учебник для учащихся 10 класса
с нарушением зрения (слабовидящих)
специальных школ (классов)

Рекомендовано Министерством просвещения
Республики Казахстан

Алматы
2022

УДК
ББК
А

Печатается по изданию: Абылкасымова А. Е. и др.

А Алгебра. Учебник для 9 класса общеобразовательных школ. / А. Е. Абылкасымова, Т. П. Кучер, В. Е. Корчевский, З. А. Жумагулова. – Алматы: Мектеп, 2019. – 184 с.

Адаптировано на укрупненный шрифт ТОО «Центр САТР» по заказу Министерства просвещения Республики Казахстан. В 2-х ч. / Часть 1. – Алматы, 2022. – 304 с.

ISBN
Часть 1. – 304 с.
ISBN

УДК
ББК

© Абылкасымова А. Е., Кучер Т. П., Корчевский В. Е., Жумагулова З. А., 2019
© Издательство «Мектеп», художественное оформление, 2019
Все права защищены
Имущественные права на издание принадлежат издательству «Мектеп»

ISBN (Часть 1)
ISBN (Общий)

Условные обозначения:

– определения, свойства, правила

– проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

– проанализируй и ответь на вопрос

– вопросы для закрепления

– задания для самостоятельного изучения

– конец доказательства теоремы или свойства

– дополнительные материалы

– обязательные упражнения для всех учащихся

– упражнения средней сложности

– упражнения повышенной сложности

– упражнения для повторения

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ I

ТРИГОНОМЕТРИЯ II

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ III

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник предназначен для изучения математики учащимися 10 классов. В учебнике изложены темы: «Последовательности», «Тригонометрия», «Элементы теории вероятностей».

Каждый параграф учебника, а их – 21, включает теоретическую часть, которая сопровождается подробными решениями примеров на использование теоретического материала. По ходу изложения теоретического материала предлагаются задания для самостоятельного обоснования (доказательства) некоторых утверждений и вопросы для самоконтроля, требующие вдумчивой самостоятельной работы над усвоением теории.

К каждому параграфу учебника предложены упражнения трех уровней сложности для закрепления изученного материала, которые обозначены с помощью букв

,

,

. К первому уровню **(A)** относятся упражнения, выполнение которых обязательно для каждого учащегося. Ко второму уровню **(B)** относятся упражнения средней сложности. Упражнения третьего уровня сложности **(C)**,

в том числе отмеченные звездочкой **(*)**, рекомендуются тем учащимся, которые интересуются математикой и умеют творчески применять полученные теоретические знания.

В учебник включены практико-ориентированные задания, упражнения на использование электронных ресурсов.

В конце каждой главы даны тестовые задания. Соответственно содержанию курса учебник дополнен глоссарием.

В конце каждого параграфа имеются упражнения для повторения. Они предназначены для того, чтобы учащиеся при их выполнении могли вспомнить пройденный материал с целью его использования при изучении следующего параграфа.

Для проверки правильности выполнения упражнений в конце учебника имеются ответы.

Изучение математики потребует от учащихся упорства и трудолюбия, усидчивости и внимания, терпения и настойчивости. Только при таких качествах можно достигнуть успехов в учебе.

(Авторы)

Упражнения для повторения курса алгебры 9 класса

Неравенства и их системы

1. Решите неравенство:

1) $(x-8)(x+3) \geq 0$;

2) $(7+x)(2-x) \leq 0$;

3) $x(9-x) < 0$;

4) $x(x-6) > 0$;

5) $\dfrac{x+4}{5-x} > 0$;

6) $\dfrac{6-x}{6+x} \leq 0$;

7) $\dfrac{x+4,5}{x(4,5-x)} \geq 0$;

8) $\dfrac{x(x+1)}{2-x} > 0$;

9) $(x-3)(x+3) \geq x^2+5x-4$;

10) $x^2+5x-4 \leq 2$;

11) $x^2+3x-4 > 6x$;

12) $9x^2-6x+1 \leq 0$.

2. Найдите наименьшее целое число, при котором верно неравенство:

1) $(x+1)^2(x-4) > 4$;

2) $(x+2)(x-3)^2 \geq 0$;

3) $x^2-5x < -x+5$;

4) $-2x^2-x > 2x-5$.

3. Найдите наибольшее целое число, при котором верно неравенство:

1) $(x-2)^2(x-7) \leq 0$;

2) $(x+4)(x-5)^2 < 0$;

3) $(x^2+14x+13)(x-10) \leq 0$;

4) $(-7x^2-6x+1)(x-5) \geq 0$.

4. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $x+\sqrt{x^2-3x-10}$;

2) $2x-\sqrt{x^2-4x-12}$;

3) $\sqrt{3x^2-5x-8}+\dfrac{1}{x-2}$;

4) $\sqrt{5x^2+4x-1}+\dfrac{1}{x-8}$;

5) $\sqrt{x^2-4x-5}+\dfrac{1}{x^2-1}$;

6) $\sqrt{-x^2+4x+32}+\dfrac{1}{x^2-9}$;

7) $\sqrt{2x^2-6x-9}+\sqrt{x+2}$;

8) $\sqrt{-2x^2-4x+10}-\sqrt{3-x}$?

5. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-1} > 0, \\ \dfrac{x-9,3}{x+3} < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{x-25} \le 0, \\ \dfrac{22-x}{4+x} < 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 25 \le 0, \\ x^2 + 2x - 8 > 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0, \\ x^2 - 3x - 18 < 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - 4 \ge 0, \\ x^2 - 2x - 15 < 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + x - 2 \ge 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0. \end{cases}$

6. Решите неравенство:

1) $(x-10)(x+5)(x-6) \ge 0;$

2) $(x+2)(x-7)(x+11) \le 0;$

3) $\dfrac{x+5}{x-6} \ge 0;$

4) $\frac{x-7}{x+2} \le 0;$

5) $\frac{x}{x-7} \ge 2;$

6) $\frac{x}{6+x} \le -1;$

7) $(x-1)(x-2)^2(x-3) < 0;$

8) $(x+3)^2(x+2)(x+1) < 0.$

7. С помощью графика квадратичной функции и методом интервалов решите неравенство:

1) $x^2 - 2x - 5 \ge 0;$

2) $-x^2 - 2x + 15 \le 0.$

8. Решите неравенство:

1) $6x^2 - 13x - 5 > 0;$

2) $4x^2 + 33x - 27 < 0.$

9. Найдите наименьшее натуральное число, которое удовлетворяет неравенству:

1) $\frac{x+1}{x-5} \le 0$; 2) $\frac{10-x}{x-2} \ge 0$.

10. Найдите наибольшее натуральное число, которое удовлетворяет неравенству:

1) $(2-x)(x-8)^2 \ge 0$; 2) $(x-3)^2(x-9) < 0$.

11. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $\frac{x^2-81}{x} \ge 0$; 2) $\frac{7x-x^2}{x+7} \le 0$.

12. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $(x+5)(x-6)^2 < 0$;

2) $(x+6)^2(5-x) > 0$.

13. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0, \\ x - 12 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - x^2 < 0, \\ -4 - x \leq 0. \end{cases}$

14. 1) Найдите наименьшее и наибольшее натуральные числа, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + 6x + 16 > 0, \\ x^2 - 12x + 27 < 0. \end{cases}$$

2) Вычислите значение суммы наименьшего и наибольшего целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 7 \geq 0, \\ x^2 + 15x + 36 < 0. \end{cases}$$

15. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} |x| \geq 5, \\ 6 + x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \leq 3, \\ -9 + x^2 \leq 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x-2| \le 3, \\ x^2 - x + 12 < 0. \end{cases}$

16. 1) Вычислите значение суммы целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} |2x-3| \le 1, \\ x^2 + x > 0. \end{cases}$

2) Найдите множество всех целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} |2x+5| \le 3, \\ x^2 - 5x - 24 \le 0. \end{cases}$

17. Укажите три пары чисел, являющихся решением уравнения:

1) $3x - 4y = 10$; 2) $5x + 0{,}2y = 1$.

18. Среди пар чисел (0; 0,4), (0,4; 0), (0; –0,4), (–0,4; 0), (4; 6), (–4; –6), (0; 0) найдите решение уравнения $8x - 5y - 2 = 0$.

19. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 5y^2 - x^2 = 1, \\ 7y^2 + 3xy = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x^2 + xy = 5, \\ x^2 + 3xy = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 12, \\ y^2 - 3xy + 2x^2 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ y^2 - 4xy + x^2 = 3. \end{cases}$

20. Способом введения новой переменной решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} (u+v)^2 - 4(u+v) = 45, \\ (u-v)^2 - 2(u-v) = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (u+v)^2 - 5(u+v) = -4, \\ (u-v)^2 - 5(u-v) = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u - uv + v = 1, \\ u^2 + 2u + 2v + v^2 = 11; \end{cases}$

4) $\begin{cases} u + uv + v = 5, \\ u^2 + uv + v^2 = 7. \end{cases}$

21. Решите графическим способом систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2 + 2x, \\ x^2 + (y + 3)^2 = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y - x^2 - x = 0, \\ (x - 2)^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4, \\ x + y = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 9, \\ x - y = -8. \end{cases}$

Глава I

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Числовая последовательность, ее виды, способы задания и свойства

Вы познакомитесь с понятием **числовая последовательность**; научитесь находить n-й член последовательности, например: $\frac{1}{2\cdot 3}; \frac{1}{3\cdot 4}; \frac{1}{4\cdot 5}; \frac{1}{5\cdot 6}; \ldots$

Рассмотрим записи, состоящие из действительных чисел, записанных в указанном порядке:

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, … — это числовая последовательность, состоящая из натуральных чисел;

2) 1, 3, 5, 7, 9, …, 99 — это числовая последовательность, состоящая из нечетных натуральных чисел до 100;

3) –10, –12, –14, …, –98 — это числовая последовательность, состоящая из четных двузначных отрицательных чисел;

4) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$ — это числовая последовательность, состоящая из арифметических квадратных корней из простых чисел, меньших 20.

1. В записи: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, … — каждому натуральному числу соответствует число следующим образом:

$1 \to 1;\ 2 \to 2;\ 3 \to 3;\ 4 \to 4;\ 5 \to 5;\ 6 \to 6;$

$7 \to 7;\ 8 \to 8;\ 9 \to 9;$ ...

2. В записи: 1, 3, 5, 7, 9, … 99 — каждому натуральному числу от 1 до 50 соответствует некоторое нечетное натуральное число следующим образом:

$1 \to 1;\ 2 \to 3;\ 3 \to 5;\ 4 \to 7;\ 5 \to 9;$ ...;

$50 \to 99;$

3. В записи: –10, –12, –14, … –98 — каждому натуральному числу от 1 до 45 соответствует некоторое отрицательное число следующим образом:

$1 \to -10;\ 2 \to -12;\ 3 \to -14;\ ...;\ 45 \to -98;$

4. В записи: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$ — каждому натуральному числу от 1 до 8 соответствует некоторое иррациональное число следующим образом:

$1 \to \sqrt{2};\ 2 \to \sqrt{3};\ 3 \to \sqrt{5};\ 4 \to \sqrt{7};$

$5 \to \sqrt{11};\ 6 \to \sqrt{13};\ 7 \to \sqrt{17};\ 8 \to \sqrt{19}.$

Отсюда следует, что числовая последовательность является функцией натурального аргумента.

Если числовая последовательность (функция) задана на множестве первых ***n*** натуральных чисел, то она называется **конечной числовой последовательностью**, если на множестве всех натуральных чисел, то — **бесконечной числовой последовательностью**.

Пример: 1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, … — бесконечная числовая последовательность; 1, 3, 5, 7, 9, … , 99 — конечная числовая последовательность.

Числа, образующие последовательность, называются **членами последовательности**.

В общем виде члены последовательности обозначаются буквами с индексами, указывающими порядковые номера ее членов: a_1, a_2, a_3, …, a_n, …

В числовой последовательности: a_1, a_2, a_3, …, a_n, …

a_1 — первый член последовательности;
a_2 — второй член последовательности;
a_3 — третий член последовательности;
… … … … … … … … … … … … .
a_n — n-й член последовательности;
… … … … … … … … … … … … .

В последовательности,

$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7},\ \sqrt{11},\ \sqrt{13},\ \sqrt{17},\ \sqrt{19}$:

$a_1 = \sqrt{2},\ a_4 = \sqrt{7},\ a_7 = \sqrt{17},\ a_8 = \sqrt{19}.$

Последовательность кратко (символически) записывают (a_n).

Последовательность (a_n) называется **возрастающей**, если каждый ее член a_n больше предыдущего a_{n-1}, и **убывающей**, если каждый ее член a_n меньше предыдущего a_{n-1}, **постоянной** (стационарной), если каждый ее член a_n равен предыдущему a_{n-1}.

Объясните!

Почему числовая последовательность: 1, 3, 5, 7, 9, …, 99 — возрастающая, –10, –12, –14, …, –98 — убывающая, $\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}$ — постоянная (стационарная)?

Последовательность (a_n) называется **неубывающей**, если каждый ее член a_n больше или равен предыдущему a_{n-1}, и **невозрастающей** — если каждый ее член a_n меньше или равен предыдущему a_{n-1}.

Объясните!

Почему числовая последовательность: 1, 3, 3, 7, 9, 10, 10, 10 — неубывающая, 10, 10, 9, 9, 8, 7 — невозрастающая?

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются **монотонными последовательностями**.

Найдите монотонные последовательности:

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …
2) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, …
3) 1, 3, 4, 2, 7, 8, 5, 6, 9, …
4) 1, 3, 2, 4, 5, 7, 6, 8, 9, …
5) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, …
6) 9, 9, 8, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, …

Если существует такое число, что каждый член последовательности (a_n) больше него, то последовательность (a_n) называется **ограниченной снизу**.

Если существует такое число, что каждый член последовательности (a_n) меньше него, то последовательность (a_n) называется **ограниченной сверху**.

Если выполняются оба условия, то последовательность (a_n) называется **ограниченной**.

Пример: 2. 1) –1; –2; –3; … ; –n; … ;
2) 1; 2; 3; … ; n; … ;
3) 100; 200; 300; … ; 1000;
4) –1; 2; –3; … ; $(-1)^n n$; …

1) последовательность ограничена сверху, поскольку каждый член этой последовательности меньше нуля;

2) последовательность ограничена снизу, поскольку каждый член этой последовательности больше нуля;

3) последовательность ограничена как снизу, так и сверху, т. е. является ограниченной;

4) последовательность не ограничена ни сверху, ни снизу.

Числовую последовательность можно задать различными способами.

А. **Словесный способ задания числовой последовательности**

С помощью этого способа закономерность расположения членов последовательности описывается словами.

Например, последовательность квадратов чисел натурального ряда. По этому описанию можно записать числовую последовательность: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …

Б. **Аналитический способ задания числовой последовательности**

Числовая последовательность задана аналитическим способом, если она задана с помощью формулы ***n***-го члена (говорят также общего члена).

Формула *n*-го члена (общего члена) — это формула, по которой можно найти любой член числовой последовательности, зная его номер.

Пример: 3. Зададим числовую последовательность с помощью формулы ***n***-го члена (общего члена): $a_n = 2^n$.

По данной формуле можно найти любой член последовательности:

— чтобы найти первый ее член, надо вместо ***n*** подставить число 1. Получим $a_1 = 2^1 = 2$;

— чтобы найти второй ее член, надо вместо ***n*** подставить число 2. Получим $a_2 = 2^2 = 4$.

Аналогично находим члены последовательности: $a_3 = 2^3 = 8$; $a_4 = 2^4 = 16$; $a_5 = 2^5 = 32$; $a_6 = 2^6 = 64$ и т. д. и записываем числовую последовательность: 2; 4; 8; 16; 32; 64; … .

В. **Рекуррентный способ задания числовой последовательности** заключается в том, что любой член числовой последовательности, начиная с некоторого члена, выражается через предшествующие чле-

ны. При этом задается один или несколько первых членов последовательности и формула для нахождения членов числовой последовательности по известным предшествующим членам..

Пример: 4. Заданы первые два члена числовой последовательности: $a_1 = -15$; $a_2 = 5$ и формула $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. По ним можно записать числовую последовательность: –15; 5; –10; –5; –15; –20; –35; … .

Действительно, $a_3 = a_1 + a_2$, т. е. –15 + 5 = –10;

$a_4 = a_2 + a_3$, т. е. 5 + (–10) = –5;

$a_5 = a_3 + a_4$, т. е. –10 + (–5) = –15;

$a_6 = a_4 + a_5$, т. е. –5 + (–15) = –20;

$a_7 = a_5 + a_6$, т. е. –15 + (–20) = –35.

Г. **Графический способ задания числовой последовательности.**

Числовую последовательность можно задать и графическим способом.

График числовой последовательности состоит из изолированных точек, абсциссы которых — натуральные числа, ординаты — члены последовательности, соответствующие своим номерам.

Объясните!

Как изобразили график числовой последовательности: –15; 5; –10; –5; –15 (рис. 1)?

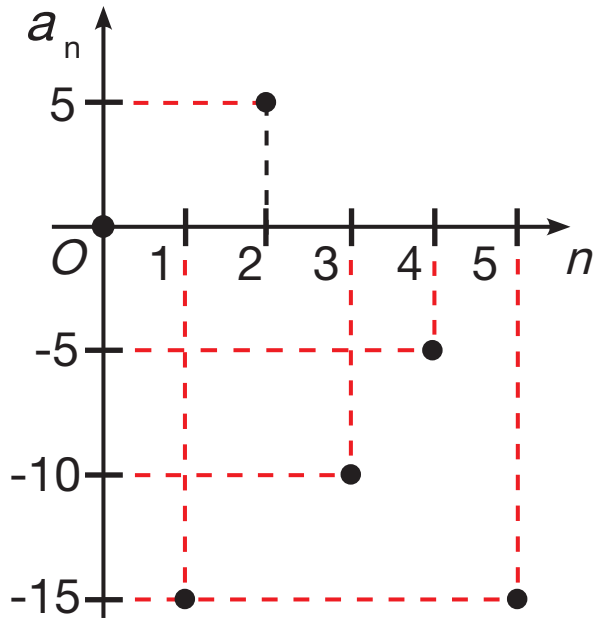


Рис. 1

?

1. Почему график числовой последовательности состоит из изолированных точек?

2. Почему последовательности 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; ...; $\frac{1}{n}$ и 1; 1,7; 1,73; 1,7320; 1,73205, ... ($\sqrt{3} = 1{,}732050807...$) являются ограниченными?

A

1.1. Выпишите первые пять членов возрастающей числовой последовательности, состоящей из натуральных чисел, которые:

1) при делении на 4 дают остаток 2;
2) при делении на 7 дают остаток 1;
3) при делении на 5 дают остаток 3;
4) при делении на 9 дают остаток 8.

1.2. Найдите первые пять членов числовой последовательности (a_n), если она задана с помощью формулы n-го члена:

1) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}+1}$;

2) $a_n = \dfrac{2n}{\sqrt{3n}-1}$;

3) $a_n = \dfrac{2n-1}{\sqrt{n}+2}$;

4) $a_n = \dfrac{3n}{\sqrt{2n-1}+1}$.

1.3. (a_n) — последовательность квадратов натуральных чисел, взятых в порядке возрастания. Выпишите члены последовательности a_5, a_9, a_{12}.

1.4. Найдите формулу n-го (общего) члена последовательности (a_n), если известны следующие ее первые члены:

1) 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14;

2) 9; 11; 13; 15; 17; 19;

3) $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{1}{8}$; $\dfrac{1}{10}$;

4) $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \frac{1}{11};$

5) 1; 2; 4; 8; 16; 32.

1.5. Напишите первые пять членов числовой последовательности, заданной формулой:

1) $a_n = (-1)^n$;

2) $a_n = 2n + 3$;

3) $a_n = 5n - 2$;

4) $a_n = n^2 + 1$;

5) $a_n = n^2 + n$;

6) $a_n = n^2 - 2n$;

7) $a_n = n^2 + 2n + 1$;

8) $a_n = (-1)^n n^2$.

1.6. Числовая последовательность задана формулой $a_n = (-1)^n n^2 - 3n$. Запишите a_6, a_9, a_{14}.

1.7. Какие из следующих последовательностей являются:

а) возрастающими;

б) убывающими;

в) ни возрастающими и ни убывающими:

1) $-1; -5; -9; -13; -17;$

2) $\frac{2}{3}; \frac{2}{5}; \frac{2}{7}; \frac{2}{9}; \frac{2}{11};$

3) $-1; -\frac{1}{8}; -\frac{1}{27}; -\frac{1}{64}; -\frac{1}{125};$

4) $-1; \frac{1}{8}; -\frac{1}{27}; \frac{1}{64}; -\frac{1}{125}; -\frac{1}{216};$

5) $\sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}; 3; \sqrt{11};$

6) $\frac{6}{13}; \frac{7}{14}; \frac{8}{15}; \frac{9}{16}; \frac{10}{17}; \frac{11}{18}$?

В

1.8. Имеется ли в последовательности, заданной формулой ***n***-го члена:

1) $a_n = 37 - 2n$ член, равный 17;

2) $a_n = 49 - 3n$ член, равный –7;

3) $a_n = 3n - 2n^2$ член, равный –104;

4) $a_n = \dfrac{4n+3}{n+1}$ член, равный 13?

1.9. Какие формулы ***n***-го члена задают: а) возрастающие; б) убывающие числовые последовательности:

1) $a_n = 3n - 7$;

2) $a_n = n^2 - 8$;

3) $a_n = 3\sqrt{n} + 4$;

4) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$;

5) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$;

6) $a_n = 1 + \dfrac{2}{2n+1}$?

1.10. Напишите первые пять членов числовой последовательности, заданной формулой:

1) $a_n = (-1)^n \cdot 2;$

2) $a_n = (-1)^n \cdot 2 + 2;$

3) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2};$

4) $a_n = n^2 + (-1)^n n;$

5) $a_n = 2^n + 1;$

6) $a_n = (-1)^n n^2 - 3n;$

7) $a_n = n^2 + 2n + (-2)^{n+1};$

8) $a_n = (-1)^n n^2 + (-1)^{n+1};$

9) $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{2n}.$

1.11. Исследуйте на монотонность последовательность (a_n), заданную формулой:

1) $a_n = -3^n$;

2) $a_n = 5^{n+1}$;

3) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$;

4) $a_n = \dfrac{5n+3}{n+1}$.

1.12. Запишите шесть первых членов числовой последовательности, заданной рекуррентно:

1) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 4$;

2) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 3a_n - 1$;

3) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 2a_n - 4$;

4) $a_1 = 88, \quad a_{n+1} = 0{,}5 \cdot a_n$.

1.13. Докажите, что последовательность $a_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{2n + 1}$ является монотонной.

1.14. Выпишите первые шесть членов числовой последовательности, заданной рекуррентно:

1) $c_1 = 1, \quad c_2 = 3, \quad c_{n+2} = 2c_{n+1} - c_n$;

2) $c_1 = 2, \quad c_2 = 3, \quad c_{n+2} = 3c_{n+1} - 2c_n$;

3) $c_1 = -2, \quad c_2 = 1, \quad c_{n+2} = 2c_{n+1} - c_n$;

4) $c_1 = 4, \quad c_2 = 7, \quad c_{n+2} = c_{n+1} - 2c_n$.

1.15. Докажите, что является убывающей числовая последовательность (a_n), заданная формулой:

1) $a_n = 302 - 53n$;

2) $a_n = -5n^2 + 3n - 2$;

3) $a_n = -9n^2 + 10n + 25$;

4) $a_n = \dfrac{n-5}{n-2}$;

5) $a_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$;

6) $a_n = \dfrac{4n+15}{n-1}$.

1.16. Докажите, что является возрастающей числовая последовательность (a_n), заданная формулой:

1) $a_n = 30n - 2$;

2) $a_n = n^2 + 2n - 2$;

3) $a_n = 9n^2 + 4n - 5$;

4) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$;

5) $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$;

6) $a_n = \dfrac{4n+3}{n+3}$.

1.17. Найдите наименьший член числовой последовательности, заданной формулой ***n*** -го члена:

1) $a_n = n^2 - 12n$;

2) $a_n = n^2 - 13n + 2$;

3) $a_n = 2n^2 + 5n - 3$.

1.18. Найдите, если возможно, наименьший и наибольший член числовой последовательности:

1) $c_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^n$;

2) $c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot 5$;

3) $c_n = -n^2 + 7$;

4) $c_n = n^2 + 7n$.

1.19. Найдите формулу общего (***n***-го) члена числовой последовательности, если известны следующие первые ее члены:

1) 0; 7; 26; 63; 124; 215;
2) 8; 26; 80; 242; 729;
3) 1; 7; 31; 127; 511;
4) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}; \quad \frac{1}{\sqrt{3}+1}; \quad \frac{1}{\sqrt{4}-1}; \quad \frac{1}{\sqrt{5}+1}.$

1.20. Выпишите первые пять членов числовой последовательности, если ее первый член равен 17, а каждый следующий член равен предыдущему, увеличенному на значение суммы его цифр.

Подготовьте сообщение об ученом-математике

Леонардо Пизанский (1180–1240)

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) — итальянский математик, написал в 1202 г. труд под названием «Книга абака» (Liber Abaci), которая стала первой математической энциклопедией Средневековья, сыгравшей существенную роль в развитии математики в Европе. Он познакомил европейцев с десятичной системой исчисления.

П

1.21. Решите уравнение:

1) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$;

2) $3x^3 - 2x^2 - 27x + 18 = 0$;

3) $x^4 - 3x^2 - 18 = 0$;

4) $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$.

1.22. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^4 + y^2 = 45, \\ y - 2x = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 11, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - y + xy = -5, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

1.23. Постройте схематически графики уравнений системы и найдите число решений системы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y - x^2 = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y + 2x^2 = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y - |x| = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y - |x - 2| = 0. \end{cases}$

1.24. Упростите выражение:

1) $a^3c^{-4} \cdot 3a^{-2}c^5$;

2) $12a^5c^4 : (3a^6c^5)$;

3) $6a^7c^8 : (8a^3c^{-4})$;

4) $12a^5c^{-4} : (3a^6c^2) \cdot \frac{3}{8}ac^4$.

1.25. Из населенного пункта A в пункт B, длина пути по проселочной дороге между которыми 18 км, вышли одновременно два туриста. Один из них при-

был в пункт B на 54 мин раньше, чем другой. Найдите скорость каждого туриста, если известно, что скорость одного из них на 1 км/ч больше, чем скорость другого.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1.26. Запишите пять первых членов последовательности, у которой каждый следующий член равен предыдущему члену, сложенному с числом 5, если:

1) первый член равен (–13);

2) первый член равен 11.

1.27. Числовая последовательность (a_n) задана формулой:

1) $a_n = 5n - 2$;

2) $a_n = 302 - 53n$;

3) $a_n = 7n - 5$;

4) $a_n = 45 - 11n$.

Найдите значение разности $a_7 - a_6$.

§ 2. Арифметическая прогрессия. Формула *n*-го члена арифметической прогрессии

Вы познакомитесь с понятием **арифметическая прогрессия**, характеристическим свойством и с формулой ***n***-го члена арифметической прогрессии; научитесь распознавать арифметическую прогрессию среди числовых последовательностей, находить ***n***-й член арифметической прогрессии; решать задачи, связанные с арифметической прогрессией.

В практической деятельности человека можно увидеть, что при сложении большого числа бревен, труб, рулонов обоев, бумаги, ткани, линолеума в каждом верхнем ряду их кладут на одно число меньше, чем в нижнем ряду.

В этих случаях число предметов, находящихся в каждом нижнем ряду, на один предмет больше, чем в верхнем ряду. Если записать число предметов в каждом ряду, то получим числовую последова-

тельность, каждый член которой начиная со второго обладает свойством — он равен значению суммы предыдущего числа и, в данных случаях, единицы, т. е. одного и того же числа. Такие последовательности в математике имеют особые названия — **арифметические прогрессии**.

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом d, называется **арифметической прогрессией**. Число d называется **разностью арифметической прогрессии**.

Объясните!

Почему являются арифметическими прогрессиями числовые последовательности: 1) –8; –2; 4; 10; 16; 22; … . 2) 5; 4; 3; 2; 1; 0?

Арифметическая прогрессия может быть конечной или бесконечной.

Если числовая последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, то это символически записывают: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$.

По определению арифметической прогрессии: $a_{n+1} = a_n + d$, где $\boldsymbol{d}$ — некоторое постоянное для числовой последовательности (a_n) число.

Пример: 1. Составим бесконечную арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = -20,\ d = 5$. Для этого воспользуемся формулой: $a_{n+1} = a_n + d$, в которую вместо буквы $\boldsymbol{n}$ подставляем по порядку числа 1; 2; 3; 4; 5 и т. д., а вместо буквы $\boldsymbol{d}$ число 5.

Получим $a_{1+1} = a_1 + 5$ или $a_2 = -20 + 5$, т. е. $a_2 = -15$;

$a_{2+1} = a_2 + 5$ или $a_3 = -15 + 5$, т. е. $a_3 = -10$;

$a_{3+1} = a_3 + 5$ или $a_4 = -10 + 5$, т. е. $a_4 = -5$;

$a_{4+1} = a_4 + 5$ или $a_5 = -5 + 5$, т. е. $a_5 = 0$;

.....

и арифметическую прогрессию –20; –15; –10; –5; 0… .

Объясните, как по заданной арифметической прогрессии найти ее разность. Запишите формулу для нахождения разности арифметической прогрессии.

Можно ли, используя эту формулу, установить, является ли числовая последовательность арифметической прогрессией?

Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Теорема. Числовая последовательность будет арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого и последнего (если она конечная), является средним арифметическим соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим арифметическую прогрессию: a_1, a_2, a_3, ...

По формуле $a_{n-1} = a_n - d$ найдем $a_{n-1} = a_n - d$ и $a_{n+1} = a_n + d$.

Тогда $a_{n-1} = a_{n-1} = 2a_n$. Следовательно,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

И, наоборот, если $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ (1), то числовая последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия.

Действительно, из формулы (1) получим $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$, или $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$. Это равенство означает, что значение разности каждого ее члена и предыдущего есть число постоянное для данной последовательности. Обозначим его буквой d: $a_{n+1} - a_n = d$. Поэтому числовая последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. □

Свойство членов арифметической прогрессии, выраженное формулой $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, является признаком арифметической прогрессии.

Формула n-го члена арифметической прогрессии

Запишем несколько первых членов арифметической прогрессии, используя определение арифметической прогрессии. Получим:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d,$$

.....

Сравнивая полученные результаты видим, что каждый член арифметической прогрессии можно представить в виде суммы ее первого члена и разности, умноженной на некоторый коэффициент, который на 1 меньше номера члена арифметической прогрессии.

Значит, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Формула $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ называется **формулой *n*-го члена арифметической прогрессии**.

Пример: 2. Найдем 27-й член арифметической прогрессии 216; 200; 184; 168; 152; ... .

В этой прогрессии $a_1 = 216$, $d = 200 - 216 = -16$.

По формуле ***n*-го** члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ получим

$$a_{27} = 216 + (27-1) \cdot (-16) = 216 - 416 = -200.$$

Ответ: –200.

Пример: 3. Найдем номер члена 887 арифметической прогрессии: 7; 15; 23; 31; 39; ...

Решение. По условию $a_1 = 7$, $a_2 = 15$. Тогда $d = a_2 - a_1 = 15 - 7 = 8$. Теперь в формулу ***n*-го** члена арифметической про-

грессии $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ подставим вместо a_1 число 7, вместо d число 8, вместо a_n число 887. Получим уравнение $887 = 7 + (n-1) \cdot 8$. Решив его, найдем номер n-го члена 887:

$$887 = 7 + (n-1) \cdot 8,$$

$$n - 1 = 110,$$

$$n = 111.$$

Ответ: 111.

Пример: 4. Выясним, является ли число –505,8 членом арифметической прогрессии 236,7; 154,2; … , если является, то укажем его номер.

Решение. В данной прогрессии $a_1 = 236,7$, $a_2 = 154,2$. Вычислим разность этой арифметической прогрессии. Получим $d = a_2 - a_1 = 154,2 - 236,7 = -82,5$.

Используя формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$,

получим $a_n = 236 + (n-1)(-82,5)$. Требуется узнать, может ли $a_n = -505,8$, и найти n.

Число –505,8 будет являться членом арифметической прогрессии, если существует такое натуральное число n, при котором значение выражения $236,7 + (n-1)(-82,5)$ равно –505,8.

Решим уравнение:

$$236,7 + (n-1)\cdot(-82,5) = -505,8.$$

$$236,7 + 82,5 - 85,5n = -505,8;$$

$$319,2 - 82,5n = -505,8;$$

$$-82,5n = -825;$$

$$n = 10.$$

Значит, число –505,8 является десятым членом арифметической прогрессии 236,7; 154,2; … .

Ответ: $n = 10$.

Пример: 5. Найдем формулу ***n***-го члена арифметической прогрессии 75; 64; 53; 42; 31; 20; ... .

Решение. Для этого в формулу ***n***-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ подставим вместо a_1 число 75, вместо ***d*** число –11, так как $d = a_2 - a_1 = 64 - 75 = -11$. Получим равенство:

$$a_n = 75 + (n-1) \cdot (-11)$$

$$a_n = 75 - 11n + 11$$

$a_n = 86 - 11n$ — формула ***n***-го члена арифметической прогрессии 75; 64; 53; 42; 31; 20; ... ..

Ответ: $a_n = 86 - 11n$.

Пример: 6. Найдем число членов арифметической прогрессии, если ее шестой член равен 31, десятый — 55, а последний — 73.

Решение. По условию $a_6 = 31,\ a_{10} = 55,$ $a_n = 73.$ Имеем $\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d, \\ a_{10} = a_1 + 9d, \end{cases}$ откуда $a_{10} - a_6 = 4d,\ 55 - 31 = 4d$ или $d = 6$. Тогда $a_1 = 1.$

По формуле ***n***-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ находим $73 = 1 + (n-1) \cdot 6,$ откуда $n = 13.$

Ответ: 13 членов.

График арифметической прогрессии

Поскольку арифметическая прогрессия является частным случаем числовой последовательности, поэтому ее графиком, как и графиком числовой последовательности, являются точки, у которых абсциссы — натуральные числа. Выясним, как располагаются эти точки.

Для этого рассмотрим формулу ***n***-го числа арифметической прогрессии:

$a_n = a_1 + d(n-1)$. В ней независимой переменной является n, поэтому обозначим ее через x. Зависимой переменной является a_n — обозначим ее через y. Учтем также, что a_1 и d для данной последовательности являются постоянными числами.

Преобразуя формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$, получим $a_n = dn + (a_1 - d)$. Введем еще обозначения: $d = k$, $a_1 - d = b$. Тогда формула n-го члена арифметической прогрессии примет вид: $y = kx + b$. Как известно, эта формула задает линейную функцию. Следовательно, точки, изображающие на координатной плоскости члены арифметической прогрессии, лежат на одной прямой и имеют натуральные абсциссы.

Значит, арифметическая прогрессия является линейной функцией, заданной на множестве натуральных чисел.

Пример: 7. Построим график арифметической прогрессии, в которой $a_1 = -7$; $d = 4$.

Для построения графика арифметической прогрессии строим точки, абсциссы которых — номера членов, ординаты — соответствующие члены арифметической прогрессии: –7; –3; 1; 5; 9; … .

Как видно из графика, все построенные точки лежат на прямой (рис. 2).

Д Первоначально прогрессией (лат. progressio означает «движение вперед») называли любую числовую последовательность, например, последовательность натуральных чисел, их квадратов, кубов. В конце Средневековья этот термин перестал быть общеупотребительным.

Сведения, связанные с прогрессиями, впервые встречаются в дошедших до нас документах Древней Греции. Уже в V в. до

н. э. греки знали следующие прогрессии: 1, 2, 3, … ***n*** и 2, 4, 6, … , 2*n*.

Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым.

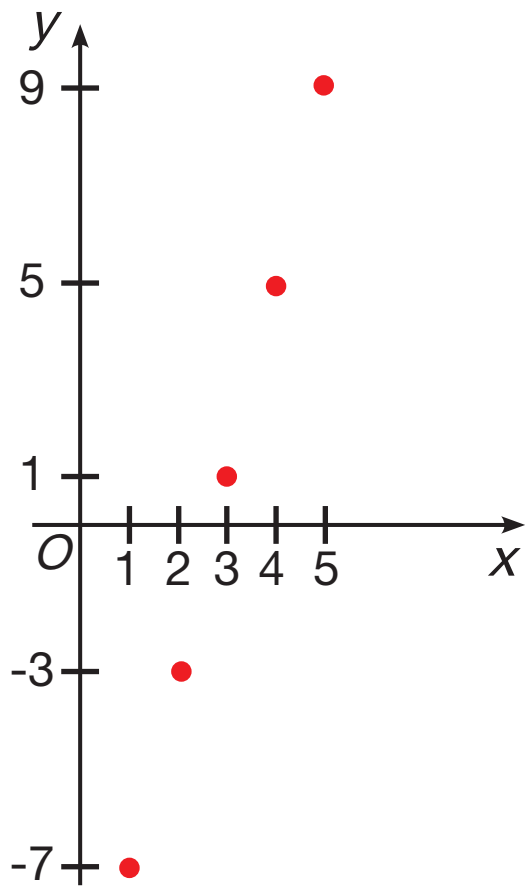


Рис. 2

1. К какому способу задания числовой последовательности можно отнести арифметическую прогрессию?

2. Приведите примеры конечной и бесконечной арифметической прогрессии.

3. Что для арифметической прогрессии обозначает формула $d = a_{n+1} - a_n$?

4. По какому признаку можно установить, что числовая последовательность является арифметической прогрессией?

A

2.1. Какие из следующих конечных последовательностей являются арифметическими прогрессиями:

1) 2; 7; 12; 17; 22; 27;

2) –200; –100; –50; –25; –12,5;

3) 4; 20; 100; 500; 2500;

4) –11; –1; 9; 19; 29;

5) 1,35; 1,6; 1,85; 2,1; 2,35;

6) –1,3; 0,13; –0,013; 0,0013;

7) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; 0; -\frac{1}{6};$

8) $\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{18}; \frac{1}{54}; \frac{1}{162}?$

2.2. Выпишите первые шесть членов арифметической прогрессии (c_n), если:

1) $a_1 = 7,\ d = 3;$

2) $a_1 = 1{,}3,\ d = -0{,}2;$

3) $a_1 = -2{,}5,\ d = 0{,}7;$

4) $a_1 = \frac{2}{7},\ d = \frac{1}{3}.$

2.3. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

1) a_7, если $a_1 = -3$ и $d = 2;$

2) a_5, если $a_1 = 2{,}3$ и $d = 1{,}2;$

3) a_{11}, если $a_1 = -2{,}1$ и $d = -2{,}3;$

4) a_9, если $a_1 = 0{,}6$ и $d = 1{,}02.$

2.4. Найдите a_{19} и n-й член арифметической прогрессии:

1) 0,5; –1; –2,5 …;
2) 13; 7; 1; … ;
3) –3,3; –1,2; 0,9; …;
4) 2; 14; 26.

2.5. 1) Материальная точка в первую секунду движения прошла 6 см пути, а за каждую следующую секунду проходила на 2 см пути больше, чем за предыдущую секунду. Сколько сантиметров пути прошла точка за седьмую секунду?
2) Поезд, отойдя от станции, равномерно увеличивал скорость движения на 40 м/мин. Какой была скорость поезда через 20 минут?

2.6. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

1) a_1, если $a_7 = -8$ и $d = 3$;

2) a_1, если $a_{10} = 7{,}3$ и $d = -0{,}2$;

3) a_1, если $a_{13} = -23,4$ и $d = 2,5$;

4) a_1, если $a_{27} = 10,6$ и $d = -1,12$.

2.7. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), в которой:

1) $a_1 = 3$ и $a_7 = -8$;

2) $a_3 = -2,3$ и $a_7 = -8$;

3) $a_2 = -1,7$ и $a_8 = 7,6$;

4) $a_5 = 21,5$ и $a_7 = 6,8$.

2.8. Является ли арифметической прогрессией последовательность (a_n), которая задана формулой:

1) $a_n = 2 - 0,3n$;

2) $a_n = 4 + 2n$;

3) $a_n = \dfrac{n-5}{8}$;

4) $a_n = \dfrac{4-n}{5}$;

5) $a_n = n \cdot (n+4)$;

6) $a_n = n \cdot (n^2 + 5)$?

В

2.9. 1) В арифметической прогрессии второй член равен 3,6, пятый — 9,6. Найдите номера членов прогрессии, принадлежащих числовому промежутку [15; 25].

2) В арифметической прогрессии третий член равен 2,4, шестой — 3,9. Найдите номера членов прогрессии, принадлежащих числовому промежутку [10; 20].

2.10. 1) Второй член арифметической прогрессии равен 3, седьмой — 23. Найдите две тысячи одиннадцатый член арифметической прогрессии.

2) Третий член арифметической прогрессии равен 4, девятый — 22. Найдите две тысячи двадцать первый член арифметической прогрессии.

2.11. 1) Является ли число 95 членом арифметической прогрессии 15; 19; 23; …? Если да, то укажите номер этого члена.

2) Является ли число 2011 членом арифметической прогрессии 33; 42; 51; …? Если да, то укажите номер этого члена.
3) Является ли число 2035 членом арифметической прогрессии –13; 19; 51; …? Если да, то укажите номер этого члена.

2.12. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если:

1) $c_{10} = 8$ и $c_{21} = 63$;

2) $c_{12} = 16$ и $c_{21} = 88$;

3) $c_9 = -1{,}8$ и $c_{19} = 23{,}2$;

4) $c_{17} = 3{,}4$ и $c_{29} = -18{,}2$.

2.13. Найдите число отрицательных членов арифметической прогрессии:

1) –24,5; –23; …;
2) –13, 3; –10,1; …;
3) –22,4; –19,6; … .

2.14. Известны два члена арифметической прогрессии (a_n) $a_7 = -1{,}6$ и $a_{13} = 4{,}8$.

Найдите для этой прогрессии:

1) первый член и разность;
2) число отрицательных членов;
3) первый положительный член прогрессии.

2.15. Известны два члена арифметической прогрессии (a_n) $a_5 = -2{,}4$ и $a_{11} = 6{,}8$. Найдите для этой прогрессии:

1) первый член и разность;
2) число отрицательных членов;
3) первый положительный член прогрессии.

2.16. Известны два члена арифметической прогрессии (a_n) $a_6 = 3{,}6$ и $a_{12} = -7{,}8$. Найдите для этой прогрессии:

1) первый член и разность;
2) число положительных членов;
3) первый отрицательный член прогрессии.

2.17. Известны два члена арифметической прогрессии (a_n) $a_9 = -2{,}2$ и $a_{14} = -10{,}8$.

Найдите для этой прогрессии:

1) первый член и разность;
2) число положительных членов;
3) первый отрицательный член прогрессии.

2.18. Расположите между числами ***a*** и ***c*** три числа так, чтобы они образовали арифметическую прогрессию вместе с числами:

1) $a = 4;\ c = 16;$

2) $a = -2;\ c = 21;$

3) $a = 1{,}2;\ c = 4{,}8.$

2.19. При каких значениях переменной ***x*** образуют арифметическую прогрессию три числа, записанные в указанном порядке:

1) $1,\ x,\ 8 - x;$ 2) $3,\ x - 1,\ 13 - 4x$?

2.20. Задана арифметическая прогрессия (a_n). Известно, что $a_8 = \frac{5}{12}$. Найдите значение суммы:

1) $a_7 + a_9$; 3) $a_5 + a_{11}$;

2) $a_6 + a_{10}$; 4) $a_3 + a_{13}$.

2.21. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что:

1) $a_1 + a_5 = 24$ и $a_1 \cdot a_3 = 60$;

2) $a_2 + a_4 = 16$ и $a_1 \cdot a_5 = 28$.

2.22. Задана арифметическая прогрессия (a_n), у которой $a_1 = -3$ и $d = 7$. Является ли членом этой прогрессии число: 1) 247; 2) 346; 3) 2067? Если да, то укажите его номер.

2.23. Укажите номера членов арифметической прогрессии, являющихся двузначными числами:

1) 3; 8; …;
2) –12; –4; …;
3) 156; 135; …;
4) 251; 229; … .

2.24. В арифметической прогрессии $\frac{c_5}{c_3} = \frac{7}{4}$ докажите, что $c_7 = 4c_2$.

2.25. Значение суммы первых трех членов возрастающей арифметической прогрессии с положительными членами равно 9, а значение суммы их квадратов равно 99. Найдите пятый член этой прогрессии.

П

2.26. Методом интервалов решите неравенство:

1) $\frac{(x-2)^2(x+3)}{x-3} > 0$;

2) $\frac{(x+2)^2(x+5)}{x-2} < 0$;

3) $\frac{(x-1)^3(x+2)}{(x-3)^2} \geq 0$;

4) $\frac{(x-4)^3(x+6)}{(x-1)^2} \leq 0$.

2.27. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{x^2-3x-4} + \sqrt{4-x}$;

2) $y = \sqrt{x^2+3x-4} + \sqrt{9-x^2}$.

2.28. Решите уравнение:

1) $(x+3)^4 - x^2 - 6x - 11 = 0$;

2) $(x-6)^4 - 2x^2 + 24x - 80 = 0$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

2.29. Является ли последовательность арифметической прогрессией? Найдите значение суммы первых четырех членов последовательности:

1) 2; 7; 12; 17; 22; 27;
2) –200; –100; –50; –25; –12,5;
3) 4; 20; 100; 500; 2500;
4) –11; –1; 9; 19; 29.

2.30. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 2n - 5$. Найдите значение суммы ее первых пяти членов.

§ 3. Формула для вычисления значения суммы первых *n* членов арифметической прогрессии

Вы познакомитесь с формулой суммы первых ***n*** членов арифметической прогрессии; научитесь применять формулы суммы первых ***n*** членов арифметической прогрессии; решать задачи, связанные с арифметической прогрессией.

Пусть требуется найти значение суммы первых пятидесяти натуральных чисел. Это можно найти последовательно выполняя сложение чисел, но вычисления будут трудоемкими и понадобится много времени.

Попытаемся найти более рациональный способ нахождения значения искомой суммы. Запишем сумму натуральных чисел от 1 до 50 дважды, расположив первый раз слагаемые в порядке возрастания, второй раз — в порядке убывания:

$1 + 2 + 3 + \ldots + 48 + 49 + 50,$

$50 + 49 + 48 + \ldots + 3 + 2 + 1.$

Заметим, что значение суммы чисел, расположенных друг под другом, одно и то же: 1 + 50 = 2 + 49 = 3 + 48 = =… = 48 + 3 = 49 + 2 = 50 + 1 = 51. Другими словами, значение суммы двух членов конечной арифметической прогрессии: 1; 2; 3; …; 48; 49; 50, равностоящих от концов, равно значению суммы ее крайних членов. Значит, каждая такая пара чисел в сумме дает 51, а число пар в двух рядах равно 25, поэтому $1+2+3+...+48+49+$

$$+50=\frac{51\cdot 50}{2}=51\cdot 25=1275.$$

Этим же приемом воспользуемся для вывода формулы суммы первых ***n*** членов арифметической прогрессии. Обозначим эту сумму через S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n. \qquad (1)$$

Если слагаемые в правой части равенства (1) напишем в обратном порядке, сумма S_n от этого не изменится. Получим

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1. \quad (2)$$

Почленно складывая равенства (1) и (2), получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) +$$

$$+ \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В каждой скобке записана сумма двух членов арифметической прогрессии, которые находятся на одинаковых расстояниях (равностоящих) от ее концов.

Убедитесь, что значения всех этих сумм в скобках равны между собой и равны значению суммы ее крайних членов $a_1 + a_n$. Для этого используйте формулу ***n***-го члена арифметической прогрессии.

Таких скобок всего ***n*** — столько, сколько членов прогрессии, поэтому $2S_n = (a_n + a_n) \cdot n$. Тогда $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ — формула суммы первых ***n*** членов арифметической прогрессии.

Выше проведенные рассуждения есть доказательство теоремы.

Теорема. Сумма первых ***n*** членов арифметической прогрессии равна полусумме ее крайних членов, умноженной на число членов.

Докажите, что если воспользоваться формулой ***n***-го члена арифметической прогрессии, то формула суммы первых ***n*** членов арифметической прогрессии имеет вид

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Пример: 1. Для хранения бревна уложили так, что в каждом верхнем ряду их

оказалось на одно бревно меньше, чем в нижнем ряду (рис. 3). Как учетчику быстро узнать, сколько бревен находится в одной кладке?

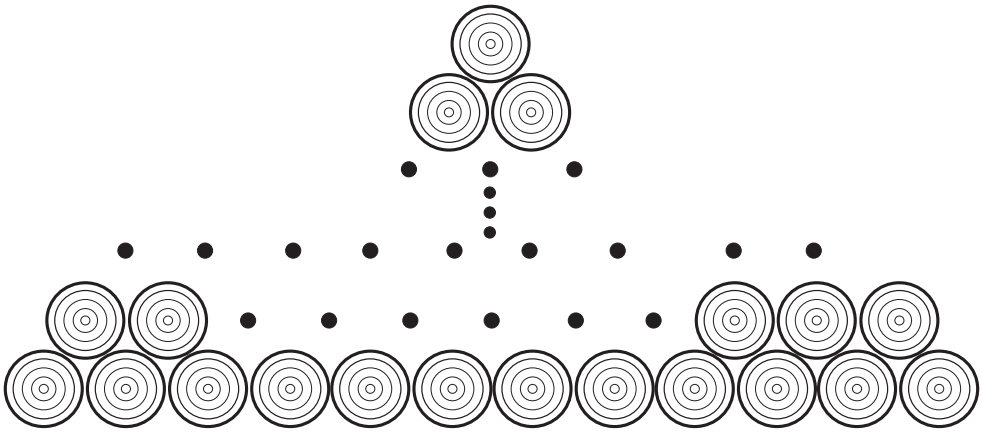


Рис. 3

Решение. Поскольку в каждом верхнем ряду на одно бревно меньше, а в нижнем ряду их 12 (можно сосчитать), то число бревен в каждом ряду образует конечную арифметическую прогрессию: 12; 11; 10; 9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1, для которой $a_1 = 12$, $a_n = 1$, $n = 12$. Используя формулу $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, получим $S_{12} = 78$.

Ответ: 78 бревен.

Пример: 2. Найдем значение суммы первых 20 членов арифметической прогрессии: 1; 3,5; … .

Решение. Первый член прогрессии равен 1, разность — 2,5. Сначала найдем 20-й член этой прогрессии по формуле ***n***-го члена. Получим $a_{20} = 1 + 2{,}5 \cdot (20 - 1) =$ $= 1 + 2{,}5 \cdot 19 = 48{,}5.$ Затем вычислим искомое значение суммы 20 членов по формуле суммы ***n*** членов арифметической прогрессии. Получим:

$$S_{20} = \frac{(1 + 48{,}5) \cdot 20}{2} = 49{,}5 \cdot 10 = 495.$$

Ответ: 495.

Пример: 3. Докажем, что значение суммы ***n*** последовательных членов арифметической прогрессии, начиная с члена ***k***, вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{a_k + a_{k+n-1}}{2} \cdot n.$$

Решение. Рассмотрим арифметическую прогрессию: $a_1 + a_2 + ... + a_k + ...$. Требуется найти значение суммы n последовательных членов арифметической прогрессии, начиная с члена k, т. е. сумму конечной последовательности, первый член которой a_k. Выясним, какой номер у последнего члена этой прогрессии. У первого члена — номер k, у второго — $k + 1$, у третьего — $k + 2$, у четвертого — $k + 3$, … у n-го — $k + n - 1$. Значит, требуется найти значение суммы членов конечной арифметической прогрессии $a_k + a_{k+1} + ... + a_{k+n-1}$, поэтому $S_n = \frac{a_k + a_{k+n-1}}{2} \cdot n$.

1. Запишите формулу для нахождения значения суммы $k(k+1)$ членов арифметической прогрессии.

2. Как можно вычислить значение суммы последовательных n членов арифметической прогрессии, начиная с члена k, не используя формулу из примера 2?

A

3.1. Найдите значение суммы 99 членов арифметической прогрессии:

1) 32, 35; …;
2) 106; 103; … ;
3) –33; –29; … ;
4) –23,5; –23; … .

3.2. Найдите a_n и S_n, если:

1) $a_1 = 5,\ d = 3$ и $n = 14$;

2) $a_1 = 12,\ d = 7$ и $n = 24$;

3) $a_1 = -55,\ d = 8$ и $n = 32$;

4) $a_1 = -7{,}3,\ d = 8$ и $n = 19$;

5) $a_1 = -16{,}8,\ d = -1{,}2$ и $n = 26$;

6) $a_1 = 12{,}56,\ d = -6{,}4$ и $n = 104$.

3.3. Найдите n и S_n, если:

1) $a_1 = 3,\ d = 3$ и $a_n = 27$;

2) $a_1 = 14,\ d = 6$ и $a_n = 74$;

3) $a_1 = -5,4,\ d = 1,8$ и $a_n = 30,6$;

4) $a_1 = -7,3,\ d = -2,6$ и $a_n = -30,7$.

3.4. Найдите n, если:

1) $a_1 = 25,\ d = -2,\ S_n = 168$;

2) $a_1 = 5,\ d = 2,\ S_n = 192$;

3) $a_1 = -12,5,\ d = 3,\ S_n = 195,5$;

4) $a_1 = -2,4,\ d = -0,8,\ S_n = -70,4$.

3.5. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 18,\ n = 27,\ S_n = 2241$;

2) $a_1 = -8,\ n = 17,\ S_n = -408$;

3) $a_1 = -5,\ n = 23,\ S_n = 1909$;

4) $a_1 = 81,\ n = 34,\ S_n = 510$.

3.6. Найдите 20-й член и значение суммы 20 первых членов арифметической прогрессии:

1) 1,3; 2,1; ...;

2) $3\frac{1}{3}$; $3\frac{7}{12}$; ...;

3) –2,87; –2,77; ... ;

4) –3,43; –3,49; ... .

3.7. Найдите разность арифметической прогрессии, если:

1) $a_{11} = 6,\ a_{16} = 8,5;$

2) $a_8 = 4,\ a_{13} = 7,5;$

3) $a_3 = 3,\ a_8 = 10,5;$

4) $a_2 = 2,\ a_9 = 6,9.$

3.8. Арифметическая прогрессия (x_n) задана формулой:

1) $x_n = 3n + 2$. Найдите значение суммы 20 первых ее членов;

2) $x_n = 2n - 9$. Найдите значение суммы 30 первых ее членов;

3) $x_n = -4n + 12$. Найдите значение суммы 12 первых ее членов;

4) $x_n = -2{,}3n - 7{,}2$. Найдите значение суммы 29 первых ее членов.

3.9. Найдите значение суммы:

1) $2 + 4 + 6 + ... + 2n$, слагаемыми которой являются все четные натуральные числа от 2 до $2n$, включая $2n$;

2) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$, слагаемыми которой являются все нечетные натуральные числа от 1 до $(2n - 1)$, включая $(2n - 1)$;

3) $3 + 6 + 9 + ... + 3n$, слагаемыми которой являются все натуральные числа, кратные 3, от 3 до $3n$, включая $3n$;

4) $5 + 10 + 15 + ... + 5n$, слагаемыми которой являются все натуральные числа, кратные 5, от 5 до $5n$, включая $5n$.

В

3.10. 1) Сколько членов надо взять в арифметической прогрессии 4; 8; ..., чтобы их сумма равнялась 112?

2) Найдите число членов арифметической прогрессии, разность которой 12, последний член – 15 и сумма всех членов – 456.

3.11. 1) В арифметической прогрессии $a_n = 5n - 100$. Найдите значение суммы всех отрицательных членов этой прогрессии.

2) В арифметической прогрессии $a_n = 7n - 130$. Найдите значение суммы всех отрицательных членов этой прогрессии.

3) В арифметической прогрессии $a_n = 51 - 3n$. Найдите значение суммы

всех положительных членов этой прогрессии.

4) В арифметической прогрессии $a_n = 58 - 4n$. Найдите значение суммы всех положительных членов этой прогрессии.

3.12. Найдите a_1 и n, если:

1) $d = 3,\ a_n = 59,\ S_n = 603;$

2) $d = -5,\ a_n = -8,\ S_n = 30;$

3) $d = 2,\ a_n = 49,\ S_n = 702;$

4) $d = -7,\ a_n = -18,\ S_n = -20.$

3.13. Напишите формулу n-го члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии (a_n) с положительными членами:

1) $a_2 + a_5 = 41$ и $a_1 + a_3 = 144;$

2) $a_2 + 2a_4 = 27$ и $a_{17} = 50;$

3) $a_2 a_5 = 112$ и $\frac{a_1}{a_5} = 2$;

4) $a_3 \cdot a_4 = 28$ и $\frac{a_1}{a_5} = 13$.

3.14. 1) Найдите седьмой член арифметической прогрессии, если $a_3 + a_{11} = 20$.

2) Найдите десятый член арифметической прогрессии, если $a_7 + a_{13} = 24$.

3.15. 1) $a_1 = 2$, $a_n = 87$, $S_n = 801$. Найдите d и n;

2) $a_1 = 21$, $n = 7$, $S_n = 105$. Найдите a_1, и d.

3.16. Найдите значение суммы всех двузначных чисел, кратных: 1) 3; 2) 7.

3.17. 1) Дано: $a_1 = 10$, $d = 4$, $S_n = 330$. Найдите n и a_n.

2) Дано: $a_1 = 10,\ n = 11,\ S_n = 330$. Найдите a_n и $\boldsymbol{d}$.

3) Дано: $d = 4,\ a_n = 50,\ S_n = 330$. Найдите a_n и $\boldsymbol{n}$.

3.18. Найдите значение суммы всех трехзначных чисел, кратных: 1) 8; 2) 13.

3.19. Найдите значение суммы всех трехзначных чисел, которые при делении на:
1) 5 дают остаток 3;
2) 25 дают остаток 11.

3.20. Найдите наибольшее из возможных значений сумм $\boldsymbol{n}$ первых членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 137$, $a_2 = 121$.

C

3.21. 1) Найдите сумму отрицательных членов арифметической прогрессии –7,1; –6,3; ... .

2) Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 6,3; 5,8; ... .

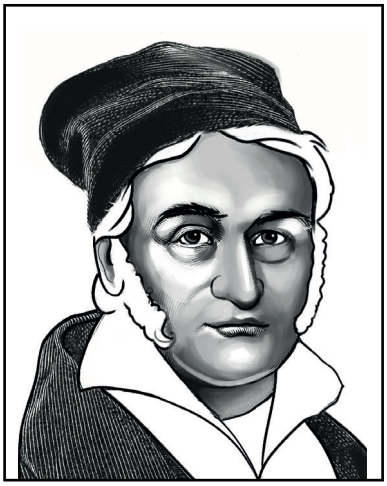
3.22. 1) Значение суммы первого, четвертого и тринадцатого членов арифметической прогрессии равно 23. Найдите a_6 и S_{11}.

2) Значение суммы первого, шестого и четырнадцатого членов арифметической прогрессии равно 63. Найдите a_{10} и S_{19}.

3.23. В арифметической прогрессии n-й член задан формулой $a_n = 2{,}5n + 2$. Найдите значение суммы членов прогрессии с одиннадцатого по двадцатый включительно.

Подготовьте сообщение об ученом-математике

С формулой $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ связан интересный эпизод из жизни немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Когда ему было 9 лет, учитель, занятый проверкой работ учащихся других классов, задал на уроке следующую задачу: «Найти значение суммы всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно:



Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100».

Каково же было удивление учителя, когда один из учеников (это был Гаусс) через минуту воскликнул: «Я уже решил». Большинство учеников после долгих подсчетов получили неверный результат. В тет-

ради Гаусса было только одно число, но зато верное.

Вот схема его рассуждений. Значение суммы чисел в каждой паре равно 101:

$$\begin{array}{c} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 100 \\ 100,\ 99,\ 98,\ \ldots,\ 1 \\ \hline 101,\ 101,\ 101,\ \ldots,\ 101 \end{array}$$

Таких пар 50, поэтому значение искомой суммы равно значению произведения $101 \cdot 50 = 5050$.

3.24. При свободном падении в первую секунду тело проходит путь длиной 5,9 м, а в каждую следующую секунду — на 9,8 м больше. Найдите длину пройденного пути свободно падающего тела:

1) за пятую секунду после начала движения;

2) за пять секунд после начала движения;

3) за седьмую секунду после начала движения;

4) за семь секунд после начала движения.

П

3.25. Постройте на одной координатной плоскости графики функций и запишите приближенные значения координат их точек пересечения:

1) $y = 2x^2 + 3x - 1$ и $y = -x^2 + 4x - 2$;

2) $y = 3x^2 + 4x + 1$ и $y = -2x^2 + x + 3$.

3.26. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{18}{x^2-9} = \dfrac{5}{x+3}$;

2) $\dfrac{3x}{x+4} + \dfrac{17}{x-4} = \dfrac{70}{x^2-16}$.

3.27. Решите графически уравнение:

1) $7x - 6 = x^3$;

2) $x^3 = \sqrt{x}$;

3) $0{,}5x - 2 = \frac{6}{x}$;

4) $3x - 1 = \frac{2}{x}$.

3.28. Решите способом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - xy + 8 = -y, \\ y - 2x = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1, \\ 3y + x = 0. \end{cases}$

3.29. Площадь прямоугольного треугольника равна 44 см^2. Если длину одного из его катетов увеличить на 2 см, а другого уменьшить на 1 см, то площадь прямоугольника станет равной 50 см^2. Найдите длины катетов данного треугольника.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

3.30. Как получен последующий член конечной последовательности:

1) 2; 8; 32; 128; 512; 2048;
2) –200; –100; –50; –25; –12,5;
3) 4; 20; 100; 500; 2500;
4) –11; –1,1; –0,11; –0,011; –0,0011?

3.31. Установите закономерность и запишите член последовательности под знаком (*):

1) 8; 4; 2; 1; (*);

2) 8; –4; 2; –1; (*);

3) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{16}$; (*);

4) –4; 16; –64; 256; (*).

§ 4. Геометрическая прогрессия. Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

Вы ознакомитесь с понятием **геометрическая прогрессия**, формулой ***n***-го члена и характеристическим свойством геометрической прогрессии; научитесь распознавать геометрическую прогрессию среди числовых последовательностей, формулы ***n***-го члена и характеристическое свойство геометрической прогрессии; решать задачи, связанные с геометрической прогрессией.

В казахской игре «тоғызқұмалақ» (девять камушков), отдаленно напоминающей шахматы, берется доска с 20 лунками: две лунки — казына — в игре не участвуют, а служат для складывания камушков. В каждом боковом крае доски располагаются по девять лунок, значительно меньших размером, чем казына, всего 18 таких лунок (рис. 4). Кроме этого используется 162 камушка.

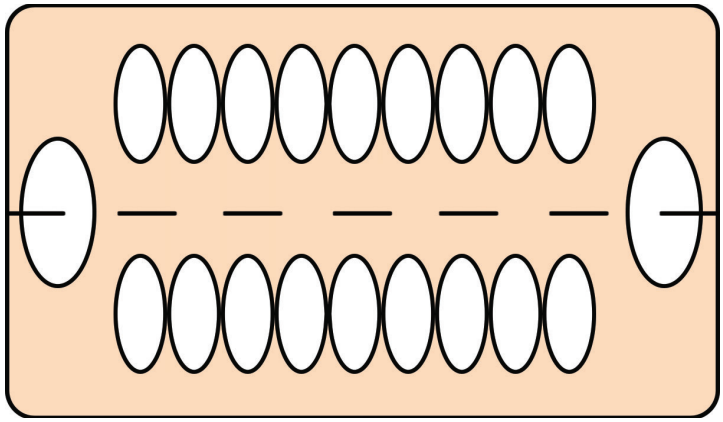


Рис. 4

Таким образом, в этой игре присутствуют числа: 2, 18, 162.

Подумайте, какая имеется закономерность между членами последовательности 2, 18, 162?

Можно ли заключить, что в данной последовательности каждый последующий член равен предыдущему, умноженному на 9? Действительно, легко убедиться, что $2 \cdot 9 = 18$ и $18 \cdot 9 = 162$.

Числовую последовательность, члены которой обладают подобным свойством, называют геометрической прогрессией.

Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же, не равное нулю число, называется **геометрической прогрессией**.

Пример: 1. Каждый член последовательности $2; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6$, начиная со второго, получается умножением предыдущего члена на 2. Эта последовательность является геометрической прогрессией.

Число, на которое надо умножить член геометрической прогрессии, чтобы получить последующий ее член, называется **знаменателем геометрической прогрессии** и обозначается буквой q.

Пример: 2. Рассмотрим несколько примеров:

1) 3, 6, 12, 24, …;
2) 4, 12, 36, 108, …;
3) 40, 20, 10, 5, 2,5, … ;
4) $\frac{3}{4}, \ -\frac{3}{8}, \ \frac{3}{16}, \ -\frac{3}{32}, \ \ldots$.

Эти последовательности являются геометрическими прогрессиями со знаменателями, равными: 2; 3; $\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2}$, соответственно.

Из определения следует, что отношение любого ее члена, начиная со второго, к предыдущему члену равно q, т. е. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Последовательность 7, 7, 7, … , членами которой является одно и то же число, можно рассматривать как геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1$.

Геометрическую прогрессию обозначают: $b_1; \ b_2; \ b_3; \ \ldots; \ b_n; \ \ldots$

Пусть дана геометрическая прогрессия $b_1; \ b_2; \ b_3; \ \ldots; \ b_n; \ \ldots$ со знаменателем q.

Зная первый член b_1 и знаменатель q, используя определение геометрической прогрессии, можно найти второй, третий, четвертый и вообще любой ее член.

Чтобы найти второй член, умножим первый член на знаменатель, для нахождения третьего его члена умножим второй член на знаменатель и т. д. Этот способ не всегда удобен, поэтому при нахождении членов с достаточно большими номерами удобнее пользоваться формулой, которая выражает любой член геометрической прогрессии через первый член, знаменатель и номер искомого члена.

$$\left.\begin{array}{c} b_2 = b_1 q \\ b_3 = b_2 q \\ b_4 = b_3 q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-1} = b_{n-2} q \\ b_n = b_{n-1} q \end{array}\right]$$

Рассмотрим полученную совокупность равенств, состоящую из $(n-1)$ равенства.

Левые и правые части этих равенств почленно умножим. Получим:

$$b_2 b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} b_n = b_1 b_2 b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} q^{n-1}.$$

Разделим обе части полученного равенства на $b_2 b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \neq 0$.

Получим формулу ***n***-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Любой член геометрической прогрессии равен первому ее члену, умноженному на степень знаменателя прогрессии, показатель которой равен числу предшествующих ему членов.

Пример: 3. Рассмотрим равносторонний треугольник, длины сторон которого равны по 4 см.

Построим треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника (рис. 5).

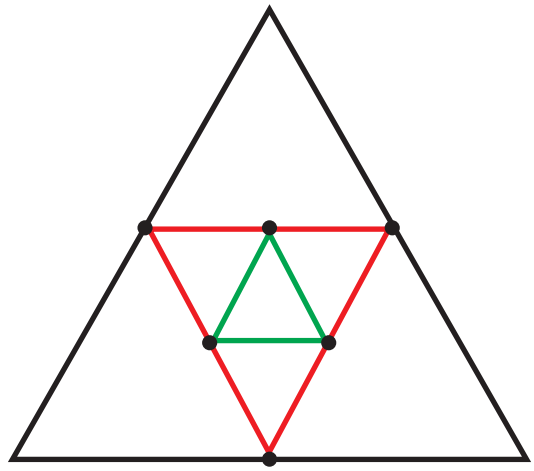


Рис. 5

Согласно свойствам средней линии треугольника, длины сторон полученного равностороннего треугольника будут равны по 2 см. Если продолжим такое построение дальше, то получим равносторонние треугольники, у которых длины сторон равны: 1 см; $\frac{1}{2}$ см; $\frac{1}{4}$ см.

Запишем последовательность чисел, выражающих длины сторон этих треугольников: 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ... .

Напишем формулу ***n*** -го члена полученной геометрической прогрессии. В этой прогрессии $b_1 = 4,\ q = \frac{1}{2}$, поэтому по формуле ***n*** -го члена геометрической прогрессии $b_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Пример: 4. Найдем шестой член геометрической прогрессии, если первый член равен 6, знаменатель $-\frac{1}{3}$.

Решение. Согласно формуле ***n*** -го члена геометрической прогрессии получим:

$$b_6 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6-1} = 6 \cdot \frac{1}{3^5} = \frac{2}{3^4} = \frac{2}{81}.$$

Ответ: $\frac{2}{81}$.

Пример: 5. Найдем номер члена геометрической прогрессии: $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8, …, который равен 128.

Решение. Находим, что $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$ и $b_n = 128$. По формуле ***n***-го члена геометрической прогрессии получим $128 = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$, или $512 = 2^{n-1}$. Поскольку $512 = 2^9$, то $2^9 = 2^{n-1}$, или $9 = n - 1$, тогда $n = 10$.

Ответ: 10.

Пример: 6. Найдем восьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 = 18$, $b_1 = 162$.

Решение. Используя формулу ***n***-го члена геометрической прогрессии выразим b_3 через b_1 и q. Получим $b_3 = b_1 \cdot q^2$ и выразим из полученной формулы

$q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}$. Значит, $q = \frac{1}{3}$ или $q = -\frac{1}{3}$, т.е. существуют две геометрические прогрессии, удовлетворяющие условию задачи. Для одной прогрессии $b_8 = b_1 q^7 = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = \frac{2}{27}$, для другой — $b_8 = b_1 q^7 = 162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -\frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = -\frac{2}{27}$.

Ответ: Задача имеет два решения: $b_8 = \frac{2}{27}$ и $b_8 = -\frac{2}{27}$.

Пример: 7. Найдем первые два члена геометрической прогрессии, если

четвертый ее член равен $\frac{1}{32}$, а шестой член равен $\frac{1}{512}$.

Решение. Если обозначим первый член прогрессии через b_1 и знаменатель через q, то из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 q^3 = \frac{1}{32}, \\ b_1 q^5 = \frac{1}{512}. \end{cases}$$

Решая ее, получим $b_1 = 2;\ q = \pm\frac{1}{4}$. Тогда для второго члена $b_2 = b_1 q = 2 \cdot \left(\pm\frac{1}{4}\right) = \pm\frac{1}{2}$.

Ответ: первый член равен 2, второй член равен $\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$.

Теорема 1. Любой член геометрической прогрессии с положительными членами b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-1}, b_n, b_{n+1} ... , начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов.

Другими словами, при $n \geq 2$ выполняется равенство: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Действительно, при $n \geq 2$ используя формулу ***n***-го члена геометрической прогрессии, выразим b_n через предыдущий член и через последующий член. Получим два равенства: $b_n = b_{n-1} \cdot q$ и $b_n = \frac{b_{n+1}}{1}$, поэтому $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ и $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

На геометрические прогрессии, содержащие отрицательные члены, эта теорема не распространяется, ведь среднее

геометрическое определено только для положительных чисел.

Пример: 8. Значение суммы трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равно 15. Если к ним прибавить соответственно числа 1, 4 и 19, то получатся три числа, составляющие геометрическую прогрессию. Найдем эти числа.

Решение. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 15.$

Поскольку $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, то $2a_2 = a_1 + a_3$.

Из условия получим $a_2 + 2a_2 = 15$, отсюда

$3a_2 = 15,\ a_2 = 5$. Тогда $a_1 = 5 - d$, $a_2 = 5$,

$a_3 = 5 + d$.

По условию $b_1 = a_1 + 1 = 6 - d,\ b_2 = a_2 +$

$+ 4 = 9,\ b_3 = a_3 + 19 = 5 + d + 19 = 24 + d.$

Используя формулу $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, можно записать, что $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, тогда получим

$9^2 = (6 - d) \cdot (24 + d)$.

Из полученного уравнения найдем d, получим два корня: $d = 3$ или $d = -21$.

Тогда $a_1 = 2$ или $a_1 = 26$.

Получим две тройки чисел: 2; 5; 8 и 26; 5; –16.

Ответ: 2; 5; 8 и 26; 5; –16.

Верна и теорема, обратная теореме 1.

Теорема 2. Если каждый член числовой последовательности с положительными членами, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов, то такая числовая последовательность является геометрической прогрессией.

Докажите теорему 2.

Свойство членов геометрической прогрессии, выраженное формулой $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, является признаком геометрической прогрессии.

1 Является ли числовая последовательность: 1) 0; 0; 0; 0; … ; 2) 1; 1; 1; …геометрической прогрессией?

2. Может ли знаменатель геометрической прогрессии быть числом: 1) положительным дробным; 2) отрицательным; 3) иррациональным; 4) нулем?

3. Какими способами можно установить, является ли числовая последовательность геометрической прогрессией?

4.1. Какие из следующих конечных последовательностей являются: а) арифметическими прогрессиями; б) геометрическими прогрессиями:

1) –14; –4; 6; 16; 26;

2) 2; 20; 200; 2000; 20 000;

3) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{54}$; $\frac{1}{108}$;

4) $\frac{1}{2}; \ \frac{1}{3}; \ \frac{1}{6}; \ 0; \ -\frac{1}{6};$

5) $2; \ -\sqrt{2}; \ 1; \ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \ \frac{1}{2};$

6) $\frac{14}{17}; \ \frac{9}{17}; \ \frac{4}{17}; \ -\frac{1}{17}; \ -\frac{6}{17}$?

4.2. Задана геометрическая прогрессия (b_n). Найдите:

1) b_7, если $b_1 = 18, \ q = \frac{1}{4};$

2) b_5, если $b_1 = 64, \ q = \frac{1}{4};$

3) b_8, если $b_1 = 4, \ q = -\frac{1}{5};$

4) b_9, если $b_1 = -625, \ q = -\frac{1}{5}.$

4.3. Задана геометрическая прогрессия (b_n). Найдите:

1) b_1, если $b_3 = 18$, $q = \frac{1}{3}$;

2) b_1, если $b_6 = 64$, $q = \frac{1}{4}$;

3) b_1, если $b_8 = 16$, $q = -\frac{1}{2}$;

4) b_1, если $b_7 = 375$, $q = -\frac{1}{5}$.

4.4. Задана геометрическая прогрессия (b_n). Найдите:

1) q, если $b_1 = 18$, $b_2 = 54$;

2) q, если $b_2 = 33$, $b_3 = 44$;

3) q, если $b_2 = -13$, $b_3 = 169$;

4) q, если $b_5 = 0{,}4$, $b_2 = -0{,}08$.

4.5. В геометрической прогрессии (b_n) найдите:

1) b_7, если $b_1 = 3\sqrt{2},\ q = -\sqrt{2}$;

2) b_5, если $b_1 = -2\sqrt{3},\ q = \sqrt{3}$;

3) b_6, если $b_1 = \sqrt{2},\ q = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

4) b_3, если $b_1 = 1-\sqrt{2},\ q = 1+\sqrt{2}$.

4.6. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = 0{,}6$ и $q = 2$;

2) $b_1 = -1{,}2$ и $q = -\dfrac{1}{3}$;

3) $b_1 = -27$ и $q = -\dfrac{2}{3}$;

4) $b_1 = 3{,}6$ и $q = \dfrac{1}{6}$.

4.7. Второй член геометрической прогрессии равен 6. Найдите значение произведения первых трех членов этой прогрессии.

4.8. Третий член геометрической прогрессии равен $\sqrt{3}$. Найдите значение произведения первых пяти членов этой прогрессии.

4.9. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, у которой третий член равен -8, а пятый равен -332.

4.10. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, у которой третий член равен $3\sqrt{3}$, а пятый равен $9\sqrt{3}$.

4.11. Запишите шестой и n-й член геометрической прогрессии:

1) 192; 48; 12; … ; 2) $\frac{64}{9}; -\frac{32}{3}; \ldots;$

3) –0,0001; 0,001; –0,01; …;

4) 2; $-2\sqrt{2}$; 4; …

4.12. Найдите: а) первый член; б) пятый член геометрической прогрессии, у которой знаменатель равен 5, а седьмой член — 62 500.

4.13. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель, если длина гипотенузы равна: 1) 2 м; 2) 6 м.

4.14. В конечной геометрической прогрессии:

а) $-\frac{1}{243}$; b_2; b_3; 3; b_5; b_5; b_6;

б) a_1; 0,72; a_3; a_4; 720; a_6 известны некоторые члены. Найдите неизвестные члены данной прогрессии.

4.15. Разность между первым и вторым членами геометрической прогрессии равна 8, а сумма второго и третьего членов — 12. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

4.16. Встретится ли среди членов геометрической прогрессии 2, 6, 18, ... число:

1) 54; 2) 72; 3) 486; 4) 576?

При положительном ответе найдите номер члена прогрессии.

4.17. С какого номера члены геометрической прогрессии:

1) 32, 16, 8, … меньше 0,01;

2) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$ больше 50?

4.18. 1) Между числами 15 и 405 вставьте два числа так, чтобы вместе с данными числами они составили геометрическую прогрессию.

2) Между числами 36 и 2,25 вставьте три числа так, чтобы вместе с данными числами они составили геометрическую прогрессию.

Математика в жизни моей семьи

4.19. 1) Вкладчик положил в банк на депозит 100 тыс. тг под 10% годовых. Какая сумма будет находиться на депозите через два года?

2) Вкладчик положил в банк на депозит 200 тыс. тг под 8% годовых. Какая сумма будет находиться на депозите через три года?

4.20. 1) Вкладчик решил положить в банк на депозит 50 000 тг. Известно, что в одном банке вклад возрастает один раз в год на 12%, а в другом он возрастает ежемесячно на 1% от накопленной на депозите суммы. В каком из банков доход будет больше и на сколько тенге больше?

2) Клиент открыл в банке депозит под 10% годовых сроком на три года и положил 200 000 тг. Какая сумма будет на депозите через три года?

4.21. Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если известно, что значение суммы крайних членов равно 84, а значение произведения средних членов равно 243.

4.22. В геометрической прогрессии (b_n) найдите b_k, если:

1) $b_{n-m} = 13$ и $b_{k+m} = 107$;

2) $b_{k-m} = 1{,}2$ и $b_{k+m} = 19{,}2$.

4.23. 1) Найдите три положительных числа, составляющих геометрическую прогрессию, если значение их суммы

равно 42, а значение суммы обратных им чисел равно $\frac{21}{32}$.

2) Найдите три положительных числа, образующих геометрическую прогрессию, если значение их суммы равно 21, а значение суммы обратных им чисел равно $\frac{21}{16}$.

4.24. Значение суммы трех чисел, образующих геометрическую прогрессию, равно 13, а значение суммы их квадратов равно 91. Найдите эти числа.

4.25. Четвертый член геометрической прогрессии больше второго на 24, а значение суммы второго и третьего членов этой прогрессии равно 6. Найдите четыре первых члена этой прогрессии.

4.26. Значение суммы трех положительных чисел, составляющих арифмети-

ческую прогрессию, равно 21. Если к этим числам прибавить, соответственно, 1, 1, 5, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

4.27. Три отличных от нуля числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел — геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой геометрической прогрессии.

4.28. Найдите четыре числа, из которых первые три числа составляют геометрическую прогрессию, а последние три числа — арифметическую прогрессию. Значение суммы крайних чисел равно 32, а значение суммы средних чисел равно 24.

П

4.29. При каком значении параметра a имеет единственное решение система уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + y^2 = 1, \\ x + y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = a? \end{cases}$

4.30. 1) Найдите значение суммы всех трехзначных чисел, меньших 600 и кратных 8.

2) Найдите значение суммы всех трехзначных чисел, больших 500, которые при делении на 23 дают в остатке число 10.

4.31. Упростите выражение и найдите его значение при $x = 2{,}5$:

1) $\dfrac{x^6 - 1}{x^2 + x + 1} : \dfrac{x^3 + 1}{x - 1} - 2;$

2) $\dfrac{x^9 - 1}{x^6 + x^3 + 1} : \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1} - \dfrac{3(x + 1)}{x - 1}.$

4.32. Упростите выражение:

1) $\dfrac{8^3 : 4^4}{14^0 a^{-2}} \cdot a^{53}$;

2) $\dfrac{5^5 (x^4)^2}{(-5x^2)^3}$;

3) $\dfrac{(a^3 \cdot 2x^4)^2}{(a^2)^2 \cdot 4x^7}$;

4) $\dfrac{8(b^3 x^4)^3}{x^{12}(-2b^3)^2}$.

4.33. Найдите значение числового выражения:

1) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3} \cdot \dfrac{1}{9}}{3^5} + \dfrac{2}{3}$;

2) $90 \cdot \dfrac{5^{-2}}{9^2} - 2 \cdot 5^{-1} \cdot 3^{-2}$;

3) $17 - \dfrac{34^3}{17^2 \cdot 2^4} \cdot 2^2$;

4) $210 - \dfrac{51^3}{17^2 \cdot 9^3} \cdot 18^2$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

4.34. Для геометрической прогрессии $b_1 = 16$, $q = -0{,}5$ запишите: 1) b_3; 2) b_6; 3) b_7; 4) b_{10}.

4.35. Для геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = -2$ запишите первые пять членов и найдите значение их суммы.

§ 5. Формула для вычисления значения суммы первых *n* членов геометрической прогрессии

Вы ознакомитесь с формулой суммы первых ***n*** членов геометрической прогрессии; научитесь применять формулы суммы первых ***n*** членов геометрической прогрессии; решать задачи, связанные с геометрической прогрессией.

Большой известностью пользуется задача 2000-летней давности о вознаграждении изобретателя шахматной игры. По преданию, индийский принц Сирам предложил изобретателю шахматной игры просить у него награду, какую он захочет.

Изобретатель попросил, чтобы ему дали за первый квадрат шахматной доски одно пшеничное зерно, за второй квадрат 2 зерна, за третий 4 и т. д., увеличивая вдвое за каждый из следующих квадратов.

Принц согласился. Но когда посчитали количество зерен пшеницы, которое

следует выдать за все 64 квадрата шахматной доски, то оказалось, что награда в этом размере не может быть выдана по недостатку пшеницы. Сколько же зерен пришлось бы выдать изобретателю?

Количество зерен, которое надлежало бы выдать за все 64 квадрата, равно значению суммы S следующего ряда чисел:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Найдем значение этой суммы, не вычисляя отдельно слагаемые, так: умножим обе части написанного равенства на 2:

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Затем вычтем из этого равенства предыдущее. Получим

$$\begin{array}{l} 2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64} \\ \underline{-\ S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}} \\ S = 2^{64} - 1 \end{array}.$$

Можно вычислить, что если бы такое число зерен рассыпать равномерно по всей земной суше, то образовался бы слой пшеницы толщиной около 9 мм. Теперь подсчитаем, что масса такого числа пшеничных зерен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Для нахождения значения суммы $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ воспользуемся тем же приемом, который использовали в рассмотренном выше примере.

Используя определение геометрической прогрессии, S_n запишем так:

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + ... + b_1 q^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на q. В результате получим равенство: $qS_n = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + ... + b_1 q^n$.

Затем вычтем почленно из этого равенства предыдущее. Получим

$$\begin{array}{l} S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} \\ \underline{-\ qS_n = b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n} \\ S_n - qS_n - b_1 - b_1 q^n \end{array}.$$

Вынесем в левой и правой частях полученного равенства общие множители. Получим $(1-q)\ S_n = b_1(1-q^n)$, или

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ q \neq 1.$$

Сумма первых ***n*** членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ равна дроби, у которой числитель есть произведение первого члена на разность между единицей и ***n***-й степенью знаменателя, а знаменатель есть разность между единицей и знаменателем прогрессии.

В случае, когда знаменатель прогрессии $q > 1$, для вычисления суммы ее пер-

вых n членов удобно пользоваться формулой $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, которая получается из формулы (4), если числитель и знаменатель дроби в правой части умножить на (–1).

Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену и $S_n = nb_1$.

Формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$S_n = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$, $q \neq 1$, или $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$;

— со знаменателем $q \neq 1$;

$S_n = nb_1$ — со знаменателем $q = 1$.

Докажите, что верно равенство $S_n = \dfrac{b_1 - b_{n+1}}{1 - q}$, $q \neq 1$.

Пример: 1. Найдем значение суммы десяти первых членов геометрической прогрессии (b_n): 1; 2; 4; 8; … .

Решение. Первый член прогрессии равен 1, знаменатель — 2. Найдем 10-й член этой прогрессии: $b_{10} = 1 \cdot 2^{10-1} = 2^9$. Теперь воспользуемся формулой суммы первых ***n*** членов геометрической прогрессии:

$$S_{10} = \frac{2^9 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023.$$

Ответ: 1023.

Пример: 2. Найдем значение суммы первых пяти членов геометрической прогрессии: 6; 2; $\frac{2}{3}$; ... .

Решение. В данной геометрической прогрессии $b_1 = 6,\ q = \frac{1}{3}$, поэтому по формуле $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ получим:

$$S_5 = \frac{6\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6\cdot\left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6\cdot 242\cdot 3}{2\cdot 243} =$$

$$= \frac{242}{27} = 8\frac{26}{27}.$$

Ответ: $8 = \frac{26}{27}$.

Пример: 3. Найдем значение суммы $1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7$.

Решение. Данная сумма является суммой первых восьми членов геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 1,\ q = 3$.

По формуле $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ получим:

$$S_8 = \frac{1\cdot(3^8-1)}{3-1} = \frac{6561-1}{2} = 3280.$$

Ответ: 3280.

Пример: 4. Значение суммы первых ***n*** членов геометрической прогрессии $S_n = -93$. Первый член этой прогрессии $b_1 = -3$, знаменатель $q = 2$. Найдем ***n***.

Решение. Воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, получим:

$$-93 = \frac{-3(2^n - 1)}{2 - 1} = -3(2^n - 1);\ 31 = 2^n - 1;$$

$$32 = 2^n;\ \ 2^5 = 2^n;\ \ n = 5.$$

Ответ: $n = 5$.

1. Какой формулой для нахождения значения суммы ***n*** членов геометрической прогрессии удобно пользоваться при: 1) $q < 1$; 2) $q > 1$; 3) $q = 1$?

A

5.1. В геометрической прогрессии (b_n) найдите n и S_n, если:

1) $b_1 = 0{,}5,\ \ b_n = 256,\ \ q = 2;$

2) $b_1 = 80\ \ b_n = 5,\ q = 0{,}5;$

3) $b_1 = 3,\ \ b_n = 243,\ \ q = 3;$

4) $b_1 = 1{,}5\ \ b_n = 240,\ \ q = 2.$

5.2. В геометрической прогрессии (b_n) найдите n и S_n, если:

1) $b_1 = 90,\ \ b_n = 3\frac{1}{3},\ \ n = 4;$

2) $b_1 = \frac{1}{3},\ \ b_n = 81,\ \ n = 6;$

3) $b_1 = 120,\ \ b_n = 3{,}75,\ \ n = 6;$

4) $b_1 = 0{,}02,\ \ b_n = 312{,}5,\ \ n = 7.$

5.3. В геометрической прогрессии (b_n) найдите q и n, если:

1) $b_1 = 2,\ b_n = 1024,\ S_n = 2046;$

2) $b_1 = 512,\ b_n = 1,\ S_n = 1023;$

3) $b_1 = 0{,}5,\ b_n = 16,\ S_n = 31{,}5;$

4) $b_1 = \frac{2}{9},\ b_n = 18,\ S_n = 26\frac{8}{9}.$

5.4. В геометрической прогрессии (b_n) найдите b_n и S_n, если:

1) $b_1 = 243,\ q = -\frac{2}{3},\ n = 6;$

2) $b_1 = -\frac{3}{2},\ q = 2,\ n = 7;$

3) $b_1 = 20,\ q = -0{,}1,\ n = 5;$

4) $b_1 = \frac{3}{5},\ q = -\sqrt{5},\ n = 5.$

5.5. В геометрической прогрессии (b_n) найдите n и b_n, если:

1) $b_1 = 3,\ q = 2,\ S_n = 93;$

2) $b_1 = 6,\ q = -2,\ S_n = -510;$

3) $b_1 = \frac{3}{5},\ q = -0,5,\ S_n = \frac{3}{8};$

4) $b_1 = -13,\ q = -0,3,\ S_n = -10,27.$

5.6. В геометрической прогрессии (b_n) найдите b_1 и S_n, если:

1) $q = 0,5,\ n = 6,\ b_n = 3;$

2) $q = 3,\ n = 5,\ b_n = 486;$

3) $q = 0,5,\ n = 4,\ b_n = 0,375;$

4) $q = 1,5,\ n = 5,\ b_n = \frac{9}{16}.$

5.7. В геометрической прогрессии (b_n) найдите b_1 и b_n, если:

1) $q = 2,\ n = 11,\ S_n = 2047$;

2) $q = \frac{1}{3},\ n = 5,\ S_n = 121$;

3) $q = 0{,}5,\ n = 6,\ S_n = 7\frac{7}{8}$;

4) $q = -2,\ n = 7,\ S_n = 258$.

5.8. В геометрической прогрессии (b_n) найдите b_1 и $\boldsymbol{n}$, если:

1) $q = 0{,}5,\ b_n = 3,\ S_n = 93$;

2) $q = 3,\ b_n = 54,\ S_n = \frac{242}{3}$;

3) $q = -2,\ b_n = -4,\ S_n = -\frac{63}{24}$;

4) $q = -\frac{1}{3},\ b_n = -\frac{1}{3},\ S_n = \frac{182}{3}$.

5.9. 1) В геометрической прогрессии $b_2 = 1,\ b_3 = 2$ найдите $\frac{S_{14}}{S_7}$.

2) В геометрической прогрессии $b_3 = 3,$ $b_4 = 1{,}5$ найдите $\frac{S_9}{S_{18}}$.

Математика в бизнесе

5.10. 1) Банк дает своим вкладчикам 10% годовых. Каким будет вклад в 200 000 тг через 2 года?

2) Снижение себестоимости производства товара равно 5% в год. Первоначальная себестоимость товара равна 10 000 тг. Чему станет равной ее себестоимость через 2 года?

5.11. 1) Значение суммы первых 85 членов геометрической прогрессии равно 2225. Найдите значение суммы первых 85 членов такой прогрессии, каждый

член которой составляет 40% от соответствующего члена данной прогрессии.

2) Значение суммы первых 85 членов геометрической прогрессии равно 8255. Найдите значение суммы первых 85 членов такой прогрессии, каждый член которой составляет 60% от соответствующего члена данной прогрессии.

B

5.12. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что:

1) $S_n = 219$, $b_1 b_2 b_3 = 13\,824$. Найдите b_3.

2) $S_3 = 93$, $b_1 b_2 b_3 = 3375$. Найдите S_4.

5.13. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что: $S_3 = 6$, $b_1 + b_3 + b_5 = 10{,}5$. Найдите q.

5.14. Найдите значение суммы членов геометрической прогрессии:

1) 4; 12; 36; …; 2916;

2) $\frac{81}{4}; \frac{27}{4}; \frac{9}{4}; \ldots; \frac{1}{108};$

3) –1; 2; –4; …; –256;

4) 3; –6; 12; –24; …; 192.

5.15. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что:

1) $q = 2,\ S_5 = 62$. Найдите b_1.

2) $q = -3,\ S_5 = 244.\ S_6 = -738$. Найдите b_1.

Математика в бизнесе

5.16. Стоимость оборудования равна 200 000 тг. Какой будет стоимость оборудования через четыре года, если она ежегодно уменьшается на 2%?

5.17. 1) Для геометрической прогрессии (b_n) известно, что $S_2 = 4$ и $S_3 = 13$. Найдите b_1 и S_5.

2) Для геометрической прогрессии (b_n) известно, что $S_3 = 42$ и $S_4 = 170$. Найдите b_1 и S_5.

5.18. Найдите число членов геометрической прогрессии 3; 6; 12; 24; …, чтобы значение их суммы было: 1) больше 3066; 2) больше 6000.

5.19. Значение суммы первых трех членов геометрической прогрессии равно 1,4, а значение их произведения равно 0,064. Найдите S_5.

5.20. В геометрической прогрессии (b_n) значение суммы первого и пятого членов равно 51, а значение суммы второго и шестого членов равно 102. Сколько членов этой прогрессии надо взять, чтобы значение их суммы было равно 3069?

5.21. Найдите третий член геометрической прогрессии, если ее знаменатель равен 3, а значение суммы первых четырех ее членов равно –40.

5.22. 1) $b_n = 128,\ q = 2,\ n = 7$. Найдите b_1 и S_n;

2) $b_1 = 81,\ b_n = -10\frac{2}{3},\ n = 6$. Найдите q и S_n.

5.23. Разность между первым и вторым членами убывающей геометрической прогрессии равна 8, а сумма второго и третьего ее членов — 12. Найдите сумму первых четырех членов.

5.24. Значение суммы четырех членов геометрической прогрессии равно –40, а значение суммы их квадратов равно 3280. Найдите эту прогрессию.

5.25. Решите уравнение $1+x+x^2+x^3+$ $+\ldots+x^{109}=0$.

5.26. Решите неравенство:

1) $(x-1)\cdot(x-6)<50$;

2) $(x-14)\cdot(x-2)>64$.

5.27. Найдите значения параметра p, при которых при любых значениях переменной x верно неравенство:

1) $2x^2-4x+p>0$; 2) $px^2+5x-4<0$.

5.28. 1) Найдите значение суммы всех натуральных чисел, не превосходящих 200, которые не кратны 5.

2) Найдите значение суммы всех натуральных чисел, больших 100 и не превосходящих 200, которые не кратны 3.

5.29. Постройте график функции:

1) $y = 2x^2 - 3x$; 2) $y = 2x^2 + 5x$.

5.30. Между числами 5 и 25 вставьте еще семь членов так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

5.31. В геометрической прогрессии (b_n) найдите S_n, если:

1) $b_1 = 1,\ q = 2,\ n = 11$;

2) $b_1 = 81,\ q = \frac{1}{3},\ n = 5$.

5.32. В геометрической прогрессии (b_n) найдите q, если: 1) $b_1 = 0{,}125,\ b_6 = -4$;

2) $b_1 = 81,\ b_6 = -\frac{1}{9}$.

§ 6. Формула для вычисления значения суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Вы ознакомитесь с формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии; научитесь применять формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии для перевода десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь.

На числовой оси отложим отрезок MN, длина которого равна длине единичного отрезка, т. е. 1 (рис. 6). От точки N вправо отложим отрезок NN_1, равный $\frac{1}{4}$ от единичного отрезка, т. е. $NN_1 = \frac{1}{2}MN$. От точки N_1 вправо отложим третий отрезок $N_1N_2 = \frac{1}{4}MN$ и т. д., т. е. длина каждого

последующего отрезка равна $\frac{1}{2}$ части от длины предыдущего.

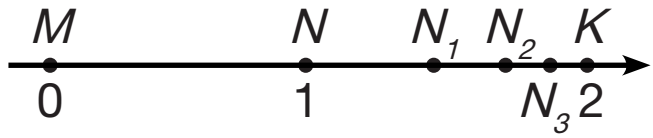


Рис. 6

В результате получим последовательность отрезков MN; NN_1; N_1N_2; N_2N_3; ... и их длин $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ...; $\frac{1}{2^{n-4}}$; ...; — бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\frac{1}{3}$,

$3;\ -1;\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ ...;\ 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1};\ ...$

В этих двух прогрессиях модуль знаменателя прогрессии $|q| < 1$, поэтому с возрастанием номера ***n*** член каждой из этих бесконечных геометрических прогрессий по модулю приближается к нулю.

Такие геометрические прогрессии называют **бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями**.

Геометрическая прогрессия со знаменателем $|q| < 1$ называется **бесконечно убывающей геометрической прогрессией.**

Для вывода формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии b_1; b_2; b_3; ...; b_n; ... воспользуемся формулой суммы — первых ***n*** членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Преобразуем выражение, записанное в правой части равенства:

$$S_n = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n.$$

Если $|q| < 1$, то при неограниченном увеличении n значение степени q^n бесконечно уменьшается, поэтому значение произведения $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$ стремится к нулю. Значит, при неограниченном увеличении n значение суммы S_n стремится к значению выражения $\frac{b_1}{1-q}$.

Выражение $\frac{b_1}{1-q}$ принимают за сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$. Обозначив его буквой S, получим формулу $S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

$S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$ — формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой $|q| < 1$.

Пример: 1. Найдем значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если первый ее член равен 3, а знаменатель равен $\dfrac{1}{3}$.

Решение. Применив формулу суммы членов при $b_1 = 3$ и $q = \dfrac{1}{3}$, получим

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

Пример: 2. Найдем значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\ \ldots$

Решение. Найдем первый член прогрессии $b_1 = 1$ и знаменатель $q = \frac{1}{2}$. Применим формулу $S = \frac{b_1}{1-q}$. Получим $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Ответ: 2.

Пример: 3. Представим бесконечную десятичную периодическую дробь 3,(03) в виде обыкновенной дроби.

Решение. Число 0,(03) можно записать в виде суммы: 0,(03) = 0,03 + 0,0003 + + 0,000003 + … .

Эта сумма является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем 0,01, поэтому

$$S = \frac{0,03}{1-0,01} = \frac{0,03}{0,99} = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}.$$

Ответ: $\frac{1}{33}$.

Пример: 4. Обратим бесконечную периодическую десятичную дробь 0,2(54) в обыкновенную дробь.

Решение. Число 0,2(54) можно записать в виде суммы: 0,2(54) = 0,2 + 0,054 + + 0,00054 + … .

В сумме 0,054 + 0,00054 + 0,0000054 + + … слагаемые являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = 0,01$.

Применив формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, найдем:

$$S = \frac{0,054}{1-0,01} = \frac{0,054}{0,99} = \frac{54}{990} = \frac{5}{55}.$$

Значит, $0,2(54) = 0,2 + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}$.

Ответ: $\frac{14}{55}$.

Пример: 5. Решим уравнение $1+x+$ $+x^2+...+x^n+...=3,5$, где $|x|<1$.

Решение. В левой части уравнения записана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, поэтому $1+x+x^2+...+x^n+...=\frac{1}{1-x}$. Тогда уравнение $1+x+x^2+...+x^n+...=3,5$ примет вид: $\frac{1}{1-x}=3,5$. Получим $x=\frac{5}{7}$.

Ответ: $\frac{5}{7}$.

?

1. В каком случае бесконечная геометрическая прогрессия будет убывающей?

A

6.1. Найдите значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \ldots;$

2) $-25;\ -5;\ -1;\ -0{,}2;\ \ldots;$

3) $6;\ 1;\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{36};\ \ldots .$

6.2. Найдите значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = -20,\ q = \frac{1}{7};$ 2) $b_1 = 16,\ q = \frac{1}{4}.$

6.3. Найдите значение суммы:

1) $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \ldots;$

2) $8 - 4 + 2 - 1 + 0{,}5 - \ldots;$

3) $100 - 10 + 1 - 0{,}1 + \ldots .$

6.4. Запишите в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь: 1) 0,(3); 2) 14,(17); 3) 2,(126); 4) 3,(71).

6.5. Найдите значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $\frac{1}{2}; \ \frac{1}{3}; \ ...;$

2) $\sqrt{3}; \ 1; \ \frac{1}{\sqrt{3}}; \ ...;$

3) $\sqrt{2}; \ -1; \ \frac{1}{\sqrt{2}}; \ ...;$

4) $\frac{3}{7}; \ -\frac{9}{49}; \ \frac{27}{343}; \ ...;$

5) $3\sqrt{3}; \ -\sqrt{3}; \ \frac{\sqrt{3}}{3}; \ ...;$

6) $5; \ -\sqrt{5}; \ 1; \ ...$.

6.6. Запишите в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь:

1) 3,2(3);
2) 4,36(13);
3) 21,00(12);
4) 33,04(731).

6.7. 1) Найдите значение суммы бесконечной геометрической прогрессии, если ее второй член равен 9, а пятый член равен $\frac{1}{3}$.

2) Найдите значение суммы бесконечной геометрической прогрессии, если ее третий член равен 25, а шестой член равен 0,2.

6.8. В бесконечной геометрической прогрессии с положительными членами значение суммы первых трех ее членов равно 10,5, а значение суммы всех членов прогрессии равно 12. Найдите эту прогрессию.

6.9. В бесконечной геометрической прогрессии с положительными членами значение суммы первых пяти членов равно $\frac{93}{16}$, а значение суммы всех членов прогрессии равно 6. Найдите эту прогрессию.

6.10. Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, если известно:

1) $q = -\frac{5}{8}$; $S = 80$; 2) $q = \frac{3}{7}$, $S = 42$.

6.11. Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, если известно:

1) $b_1 = 15$, $S = 18$; 2) $b_1 = 18$, $S = 15$.

В

6.12. Значение произведения первого, третьего и пятого членов бесконечно убывающей прогрессии равно 8, а значение суммы ее второго и четвертого членов равно –5. Найдите значение суммы всех членов геометрической прогрессии.

6.13. 1) Известно, что в бесконечно убывающей геометрической прогрессии каждый член в 2,5 раза больше суммы всех последующих членов. Найдите знаменатель прогрессии.

2) Известно, что в бесконечно убывающей геометрической прогрессии каждый член в 4 раза больше значения суммы всех последующих членов. Найдите знаменатель прогрессии.

6.14. Значение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии на 16 больше ее первого члена, а значение суммы ее первых двух членов равно 24. Найдите восьмой член этой прогрессии.

6.15. В квадрат, длина стороны которого равна 8 см, вписан другой квадрат, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата. В полученный квадрат таким же способом вписан другой квадрат и т. д. Найдите значение

суммы периметров и значение суммы площадей этих квадратов.

6.16. В равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 8 см, вписан другой равносторонний треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника. В полученный треугольник таким же способом вписан другой равносторонний треугольник и т. д. Найдите значение суммы периметров и значение суммы площадей этих треугольников.

6.17. Найдите значение суммы: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}+\ldots$.

6.18. Первый член бесконечной геометрической прогрессии на 8 больше второго, а значение суммы ее членов равно 18. Найдите четвертый член этой прогрессии.

C

6.19. Первый член бесконечной геометрической прогрессии (c_n) равен c, а знаменатель равен q. Найдите значение суммы:

1) $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots$;

2) $(c_1 + c_2)^2 + (c_3 + c_4)^2 + (c_5 + c_6)^2 \ldots$.

6.20. Найдите корень уравнения:

$$1 + \frac{x+1}{x-1} + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 + \ldots = \frac{x^2}{2}.$$

6.21. Найдите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен 1, а каждый ее последующий член в три раза больше значения суммы следующих за ним членов.

6.22. Найдите значение суммы:

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{9}+\frac{9}{16}+\frac{1}{27}+\frac{27}{64}+\ldots .$$

6.23. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), у которой второй член равен 6, а значение суммы ее членов равно $\frac{1}{8}$ от значения суммы квадратов ее членов.

6.24. Последовательность чисел образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, значение суммы членов которой равно 8. Найдите первый член и знаменатель прогрессии, если значение суммы кубов ее членов равно $\frac{512}{37}$.

П

6.25. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{x-6}{x-1}=\dfrac{13}{6}-\dfrac{x-1}{x-6}$;

2) $\dfrac{x-4}{x+2}=\dfrac{17}{4}-\dfrac{x+2}{x-4}$.

6.26. Постройте график функции:

1) $y=x^2+2|x|$.

6.27. Разложите на множители выражение:

1) x^4+2x^3+x-2;

2) x^4-5x^3-x+5;

3) $x^4-2x^3-x^2+2$;

4) $x^4+4x^3-x^2-4$.

6.28. Углы выпуклого четырехугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите значение суммы наимень-

шего и наибольшего углов этого четырехугольника.

6.29. Найдите значение суммы всех натуральных чисел, кратных 5, заключенных в промежутке от 50 до 150.

6.30. Пусть члены последовательности заданы формулой $a_n = (2n+1)\cdot 3^n$. Докажите, что значение суммы первых n членов этой последовательности вычисляется по формуле $S_n = n\cdot 3^{n+1}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

6.31. Докажите, что при $n = 3$ выражение $4^n + 12n - 1$ делится на 3.

6.32. Найдите значение суммы

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{9\cdot 11}.$$

§ 7. Метод математической индукции

Вы познакомитесь с методом математической индукции; научитесь применять метод математической индукции.

Математическая индукция в математике — один из методов доказательства. Она используется, чтобы доказать справедливость некоторого утверждения для всех натуральных чисел.

Например, 1) доказать, что для любого натурального n справедливо равенство $1+2+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$;

2) доказать, что для любого натурального n значение выражения $4^n+15n-1$ делится на 9;

3) доказать, что при любом натуральном $n>1$ верно неравенство

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

Во всех этих утверждениях присутствует переменная величина n, которая принимает только натуральные значения.

Теорема. Если утверждение $A(n)$, содержащее натуральную переменную, верно при $n=1$ и из того, что оно верно при $n=k$ следует, что оно верно и при $n=k+1$, то оно будет верно при всех натуральных значениях n.

Чтобы доказать некоторое утверждение, проверяют сначала его справедливость для $n=1$. Затем доказывают, что при любом натуральном значении k из справедливости рассматриваемого утверждения при $n=k$ вытекает его справедливость и при $n=k+1$. Тогда утверждение считается доказанным для всех n.

В самом деле, утверждение справедливо при $n=1$, но тогда оно справедливо и для следующего числа $n=1+1=2$. Из

справедливости утверждения для $n=2$ следует его справедливость для $n=2+1=3$. Отсюда следует справедливость утверждения для $n=4$ и т. д. В конце концов дойдем до любого натурального числа n. Значит, утверждение верно для любого n.

Пример: 1. Докажем, что для любого натурального числа n верно равенство $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Обозначим это равенство (1).

Доказательство. Проверим, верно ли равенство (1) при $n=1$. Для этого найдем значение выражения в левой части равенства (1) — оно равно 1 и в правой части равенства $\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{1\cdot 2}{2}=1$. Значит, при $n=1$ равенство (1) верно.

2) Допустим, что равенство (1) верно при $n=k$, т. к. $1+2+3+...+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$.

3) Докажем, что равенство (1) верно и при $n = k + 1$, т. е. убедимся, что верно равенство:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1) \cdot (k + 2)}{2}.$$

Действительно, используя допущение и выполнив преобразования, получим:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k \cdot (k + 1)}{2} + (k + 1) =$$

$$= \frac{k \cdot (k + 1) + 2 \cdot (k + 1)}{2} = \frac{(k + 1) \cdot (k + 2)}{2}.$$ Значит, равенство $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ верно для любого натурального числа ***n***. □

Пример: 2. Докажем, что для любого натурального числа ***n*** значение выражения $6^{2n} - 1$ делится на 35.

Доказательство. 1) Проверим, верно ли, что при $n = 1$ значение выражения

$6^{2n}-1$ делится на 35. Действительно, оно равно 35, а 35 делится на 35.

2) Допустим, что $6^{2n}-1$ делится на 35 при $n=k$, т. е. $(6^{2k}-1):35$.

3) Докажем, что $6^{2n}-1$ делится на 35 и при $n=k+1$, т. е. убедимся, что верно $(6^{2(k+1)}-1):35$.

Действительно, $6^{2(k+1)}-1=6^{2k+2}-1=36\cdot 6^{2k}-1=(6^{2k}-1)+35\cdot 6^{2k}$. Значение полученной суммы делится на 35, так как каждое слагаемое этой суммы делится на 35. Значит, для любого натурального числа ***n*** значение выражения $6^{2n}-1$ делится на 35. □

Пример: 3. Докажем справедливость неравенства $2^n > n$ для любого натурального числа ***n***.

Доказательство.

1) Проверим, что при $n=1$ неравенство $2^1 > 1$ верно. Оно верно, так как $2>1$.

2) Допустим, что неравенство $2^n > n$ выполняется для натурального числа $n = k$, т. е. неравенство $2^k > k$ верно.

3) Докажем, что это же неравенство верно и для следующего натурального числа $k+1$, т. е. докажем справедливость неравенства $2^{k+1} > k+1$.

Действительно, так как $2^k > k$ (по предположению), то умножив обе части верного неравенства на 2, получим верное неравенство: $2 \cdot 2^k > 2k$ или $2^{k+1} > k + k$.

Поскольку $\boldsymbol{k}$ натуральное число, то $2^k > k$. Если $k = 1$, то неравенство (*) примет вид: $2^{k+1} > k+1$, что и требовалось доказать.

Если $k > 1$, то, прибавив к обеим частям неравенства одно и то же число $\boldsymbol{k}$, получим верное неравенство $k + k > k + 1$. Используя это неравенство и неравенство (*), получим $2^{k+1} > k+1$.

Значит, неравенство $2^n > n$ верно для любого натурального числа $\boldsymbol{n}$. □

Пример: 4. Докажем, что число диагоналей выпуклого n-угольника можно вычислить по формуле $\frac{n(n-3)}{2}$.

Решение. Самое маленькое число сторон выпуклого многоугольника равно 3, поэтому будем доказывать формулу для $n \geq 3$.

1) Проверим, верно ли, что при $n = 3$ утверждение справедливо, т. е. число диагоналей выпуклого треугольника можно вычислить по формуле. Действительно, при $n = 3$ значение выражения $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{3(3-3)}{2}$ — это верно, так как в треугольнике нет диагоналей.

2) Допустим, что утверждение верно при $n = k$, т. е. число диагоналей выпуклого k-угольника можно вычислить по формуле $\frac{k(k-3)}{2}$.

3) Докажем, что утверждение верно и при $n = k + 1$, т. е. убедимся, что число диагоналей выпуклого $(k+1)$-угольника можно вычислить по формуле $\frac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Пусть $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots A_k A_{k+1}$ — выпуклый $(k+1)$-угольник (рис. 7). Проведем в нем диагональ $A_1 A_k$ (ее не было в k-угольнике).

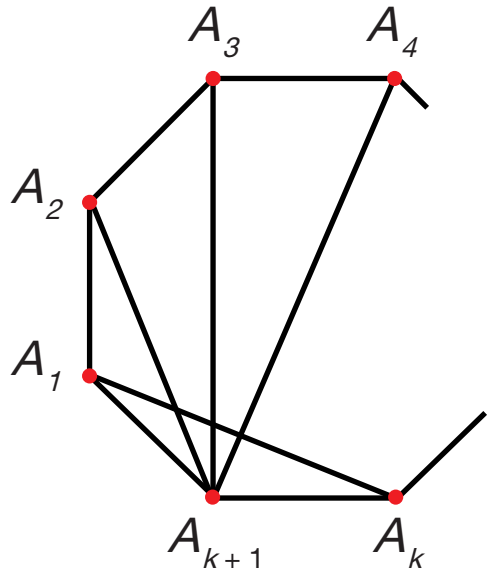


Рис. 7

Чтобы подсчитать общее число диагоналей $(k+1)$-угольника, нужно подсчитать число диагоналей в k-угольнике $A_1A_2A_3A_4\ldots A_k$, прибавить к полученному числу $k-2$, т. е. число диагоналей $(k+1)$-угольника, исходящих из вершины A_{k+1}, и, кроме того, следует добавить диагональ A_1A_k.

Таким образом, получим $\frac{k(k-3)}{2}+(k-2)+1=\frac{k(k-3)}{2}+k-1=\frac{k^2-3k+2k-2}{2}=$

$=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}$. Значит, утверждение верно для любого выпуклого n-угольника. □

? 1. При доказательстве каких утверждений можно использовать метод математической индукции?

A

7.1. Докажите методом математической индукции для арифметической и геометрической прогрессий формулы:

1) $a_n = a_1 + d(n-1)$;

2) $b_n = b_1 + q^{n-1}$.

7.2. Докажите, что для всех натуральных чисел выполняется равенство:

1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

7.3. Методом математической индукции докажите, что для всех натуральных чисел верно равенство:

1) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$;

2) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

3) $1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n-1}n=(-1)^{n-1}\left[\frac{n+1}{2}\right]$;

4) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

7.4. Докажите, что n^3-n делится на 3 при любом натуральном n.

7.5. Методом математической индукции докажите, что для всех натуральных чисел верно равенство:

1) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=$

$=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

2) $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\ldots+(-1)^{n-1}n^2=$

$=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

7.6. Подберите формулу для нахождения значения суммы и докажите методом математической индукции, что она верна для всех натуральных чисел:

1) $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\ldots+n(3n-1)$;

2) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)$.

7.7. Методом математической индукции докажите, что для всех натуральных чисел:

1) $7^n-6\cdot 2^n$ делится на 5;

2) $7^n+3\cdot 3^n$ делится на 4;

3) 15^n+6 делится на 7;

4) 9^n+3 делится на 4.

В

7.8. Найдите значение суммы:

1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

2) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

7.9. Докажите, что при любом $n \in N$ выполняется равенство:

1) $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+n(2n+1)=$

$=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$;

2) $2\cdot 2+3\cdot 5+4\cdot 8+\ldots+(n+1)(3n-1)=$

$=\frac{n(2n^2+5n+1)}{2}$.

7.10. Методом математической индукции докажите, что при четном $n \in N$:

1) 7^n-5^n делится на 24;

2) 5^n-3^n делится на 16.

7.11. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $21^n + 16 \cdot 4^n$ кратно 17;

2) $15^n + 7 \cdot 7^n$ кратно 8;

3) $13^n + 9 \cdot 3^n$ кратно 10;

4) $5^n + 7 \cdot 9^n$ кратно 4.

7.12. Докажите, что при любом нечетном натуральном n значение выражения:

1) $5^n + 2^n$ кратно 7;

2) $5^n + 11^n + 2$ кратно 6.

7.13. Докажите, что любой член числовой последовательности (a_n), для которой:

1) $a_n = n^3 + 35n$ делится на 6;

2) $a_n = n^3 + 17n$ делится на 6;

3) $a_n = 4^n + 15n - 1$ делится на 9;

4) $a_n = 7^n + 3n - 1$ делится на 9.

C

7.14. Докажите неравенство:

1) $4^n > 7n - 5$ при $n \in N$;

2) $2^n > 5n + 1$ при $n \in N$, $n \geq 5$.

7.15. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $5^n + 2 \cdot 3^n + 5$ кратно 8;

2) $5^n - 3^n + 2n$ кратно 4.

7.16. Докажите, что выполняется неравенство:

1) $3^n - 2^n \geq n$ при любом $n \in N$;

2) $3^{n-1} > 2n^2 - n$ при любом $n \in N$, $n \geq 5$.

7.17. Докажите, что n различных прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через одну общую точку, делят плоскость на $2n$ частей.

7.18. 1) Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 7a_n + 3.$

Докажите, что $a_n = \dfrac{7^n - 1}{2}$.

2) Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n - 2.$

Докажите, что $a_n = n^3 + 1$ при $n \geq 2$.

7.19. Методом математической индукции докажите, что для всех натуральных чисел верно неравенство:

1) $2^n > n^3$;

2) $2^{n+2} > 2n + 5$;

3) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$.

Подготовьте сообщение об ученом-математике

Де Морган (1806–1871)

Осознание метода математической индукции, как отдельного важного метода, восходит к Блезу Паскалю (1623—1662), хотя отдельные случаи применения встречаются у Евклида (ок. 300 г. до н. э).

Название метода было введено шотландским математиком де Морганом в 1838 г.

П

7.20. Предприниматель положил в коммерческий банк некоторую сумму денег под фиксированный процент годового дохода. Через два года сумма вклада увеличилась на 60 000 тг, а за третий год еще на 49 000 тг. Найдите первоначальную сумму вклада.

7.21. Если двузначное число разделить на значение произведения его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если к значению суммы квадратов цифр этого числа прибавить значение произведения его цифр, то получится это же число. Найдите это число.

7.22. Решите уравнение $2+4+6+\ldots+$ $+x=930$.

7.23. Значение суммы трех последовательных чисел геометрической прогрессии равно 114. Эти числа можно рассматривать как первый, четвертый и двадцать пятый члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

7.24. Решите уравнение:

1) $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$;

2) $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$.

7.25. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 3}{5 - 2x}} + \dfrac{2}{x + 1}$;

2) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{7 - 3x}} + \dfrac{1}{x}$.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

7.26. На координатной плоскости с центром в начале координат постройте окружность радиусом 2 см. Постройте центральные углы в 30°, 45°, 90°, 150°.

7.27. На координатной плоскости с центром в начале координат постройте окружность радиусом 4 см. Постройте дугу с начальной точкой на положительной оси Ox в 30°, –45°, – 90°, 150°.

Проверь себя!

1. $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия.

Найдите a_4, если $a_1 = 10$, $d = -0{,}1$:

A) 9,7; C) –97; E) –10,3.
B) 97; D) 10,3;

2. $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия.

Найдите b_6, если $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$:

A) –0,125; C) 1,25; E) –1,25.
B) 0,125; D) 12,5;

3. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: 12; 6; ... :

A) 6; C) 24; E) 12.
B) –12; D) –24;

4. Найдите сумму 100 первых членов последовательности $\{x_n\}$, если $x_n = 2n + 1$:

A) 20 400; C) 102; E) 10 200.
B) 1200; D) 1020;

5. $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия, $b_1 = 625$, $q = \frac{1}{5}$. Найдите S_5:

A) –781; C) 871; E) –10.
B) 781; D) –871;

6. Арифметическая прогрессия: 10; 8; … . Найдите S_{10}:

A) 190; C) 10; E) –10.
B) –190; D) 1;

7. Найдите двадцать пятый член арифметической прогрессии: –3; –6; …:

A) 69; C) 75; E) –75.
B) –69; D) –72;

8. Вычислите S_4, если $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия, $b_1 = 1$, $q = 3$:

A) 81; C) 80; E) –40.
B) 40; D) –80;

9. Найдите восьмой член геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если $b_1 = 32$, $q = \frac{1}{2}$:

A) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{1}{4}$; E) 64.

B) $-\frac{1}{4}$; D) $-\frac{1}{2}$;

10. $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия и $a_1 = -10$, $d = 2$. Найдите S_5:

A) –28; C) 70; E) 39.
B) –70; D) –30;

11. Найдите десятый член арифметической прогрессии: 3; 7; … :

A) –36; C) –33; E) 39.
B) 36; D) 33;

12. Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна 9, разность между четвертым и вторым членами

равна 0,4. Найдите первый член прогрессии:

A) 0; C) 1; E) 2.
B) –1; D) –2;

13. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 111, второе число больше первого в 5 раз. Найдите эти числа:

A) 10; 50; 61; D) 8; 40; 63;
B) 8,5; 42,5; 60; E) 7,4; 37; 66,6.
C) 9,4; 47; 54,6;

14. Найдите разность арифметической прогрессии, если $a_{21} = 15$, $a_1 = 5$:

A) 1,5; C) 0,5; E) –0,5.
B) –1; D) 1;

15. Найдите сумму всех натуральных чисел от 2 до 102 включительно:

A) 2626; C) 4040; E) 10504.
B) 5256; D) 5252;

16. Вычислите сумму: $\frac{1}{5}+\frac{8}{15}+\frac{13}{15}+...+\frac{33}{15}$:

A) 15,4; C) 60,8; E) 8,4.
B) 120; D) 63,8;

17. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 2$ и $q = 0{,}875$:

A) 18; C) 32; E) 100.
B) 16; D) 64;

18. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии 9; –3; 1; ... :

A) 6,75; C) –27; E) $\frac{1}{3}$.
B) $-6\frac{4}{9}$; D) 81;

19. Дана геометрическая прогрессия $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ... . Найдите $\frac{b_6}{b_4}$:

A) $\frac{3}{5}$; C) $\frac{5}{9}$; E) $\frac{2}{3}$.

B) $\frac{7}{9}$; D) $\frac{4}{9}$;

20. Найдите сумму членов бесконечной геометрической прогрессии 8, 4, …:

A) 8; C) 15; E) 16.

B) 12; D) $\frac{255}{16}$;

Глава II

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 8. Градусная и радианная мера углов и дуг

Вы познакомитесь с понятием **радианная мера угла**; научитесь переводить градусы в радианы и радианы в градусы; отмечать числа 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π на единичной окружности.

Вы знаете

Угол — это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки (рис. 8).

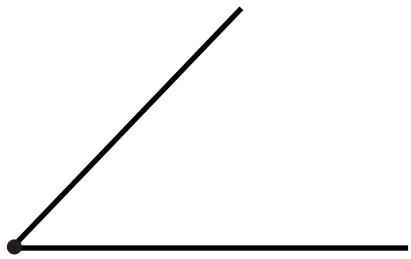


Рис. 8

Угол также можно определить как фигуру, которая получается в результате поворота луча относительно его начала (рис. 9). Действительно, начальное и последнее положение луча дает ту же геометрическую фигуру, которую до этого назвали углом.

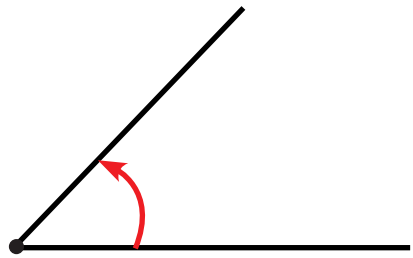


Рис. 9

Поворот одного и того же луча можно выполнить в двух противоположных направлениях. Обычно повороты против движения часовой стрелки считаются положительными, а повороты по направлению движения часовой стрелки — отрицательными (рис. 10).

Угол α считается **положительным**, если он образован поворотом луча про-

тив движения часовой стрелки, и **отрицательным**, если он образован поворотом луча по направлению движения часовой стрелки (рис. 10).

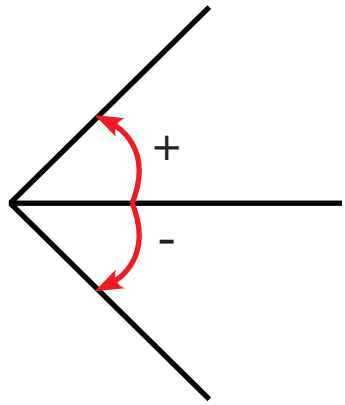


Рис. 10

Выполним вокруг точки O поворот луча OA на угол α. Получим луч OB (рис. 11).

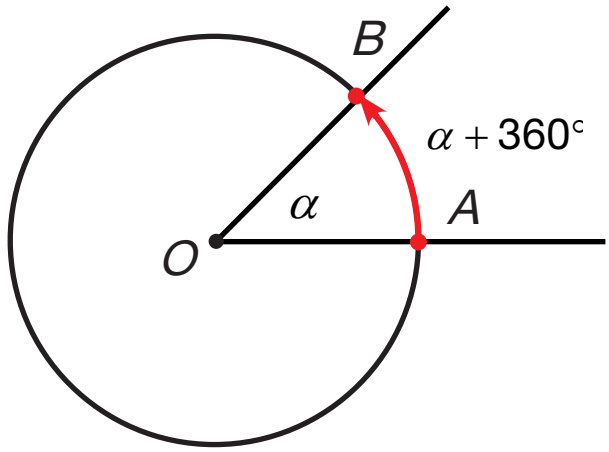


Рис. 11

Этот же луч OB получим, если совершим поворот луча OA на угол α, да еще любое целое число поворотов в положительном или в отрицательном направлении (рис. 11).

Следовательно, углу $\angle AOB = \alpha$ соответствует бесчисленное множество углов как положительных, так и отрицательных, которые получаются по формуле $\beta = \alpha + 360°k$ (где k — любое целое число, т.е. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Пример: 1. Если луч повернуть вокруг точки O в положительном направлении на угол 20°, то такому положению луча соответствуют положительные углы: 20°, 380°, 740°, ... или отрицательные углы: –340°, –700°, ...

Все полученные углы можно записать с помощью формулы $\beta = -20° + 360°k$ при $k = 1, 2, 3, \ldots$ для положительных углов, при $k = -1, -2, -3, \ldots$ для отрицательных углов.

Если луч повернуть в отрицательном направлении на угол 40°, то такому положению луча соответствуют: отрицательные углы: –40°, –400°, –760°, ... или положительные углы: 320°, 680°, ...

Все полученные углы можно записать с помощью формулы $\beta = -40° + 360°k$ при $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ для положительных углов, при $k = 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$ для отрицательных углов.

Вы знаете

Из курса геометрии вы знаете, что длина дуги окружности, как и величина угла, измеряется в градусах.

Угол, градусная мера которого равна $\frac{1}{360}$ части от полного угла, полученного в результате поворота вокруг точки O против часовой стрелки, равен **одному градусу**. Пишут 1°.

Совершив полный поворот вокруг точки O против часовой стрелки, получим угол 360°, а совершив один полный поворот вокруг точки *O* по часовой стрелке, получим угол –360° (рис. 12).

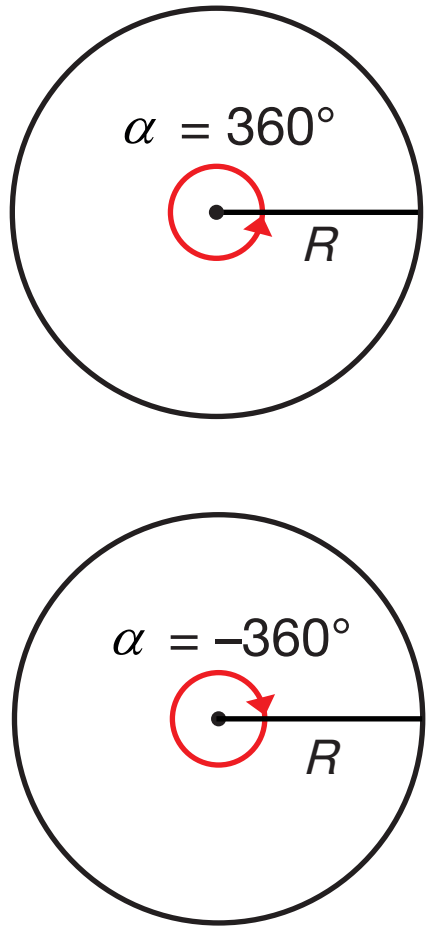


Рис. 12

Напомним, что $1'$ (минута) равна $\frac{1}{60}$ от $1°$, $1''$ (секунда) равна $\frac{1}{60}$ от $1'$.

В математике, физике, астрономии и других науках широко применяется другая мера углов — **радианная**.

Часто за единицу длины дуги окружности принимают длину дуги, равную длине радиуса этой окружности (рис. 13).

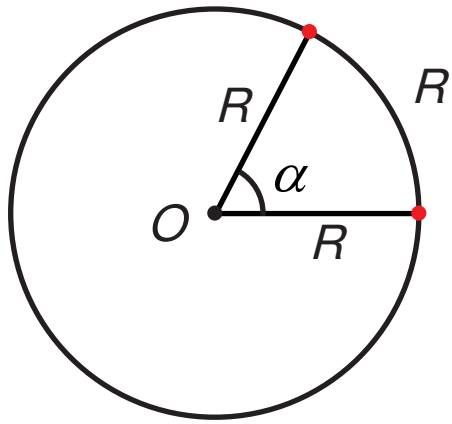


Рис. 13

Пример: 2. Если сказано, что «величина дуги AB равна 2,3», то это означает, что построенная дуга окружности содержит

2,3 дуги, длиной, равной длине радиуса окружности (рис. 14).

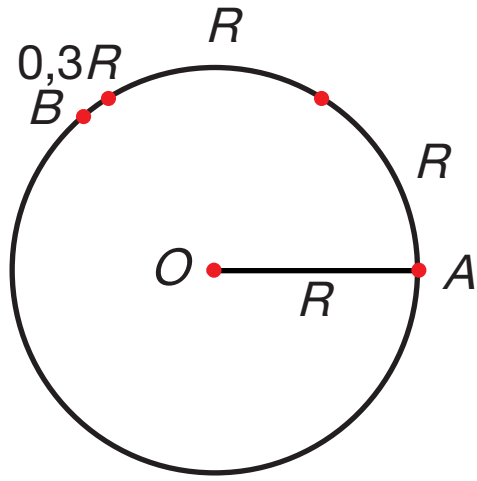


Рис. 14

Если в качестве единицы длины дуги взять длину радиуса R, то он содержится в окружности 2π раз, так как длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$, где R длина радиуса окружности.

Такое измерение длины всей окружности или длины ее дуги называется **измерением в радианах**.

Таким образом, в качестве радианной меры длины дуги l или величины угла α берется отношение длины дуги окружности

l, образующей угол α, к длине ее радиуса R (рис. 15). Тогда радианную меру угла α, соответствующего дуге окружности длиной l, можно записать так:

$\alpha = \frac{l}{R}$, где l – длина дуги окружности,

R — длина радиуса этой окружности,

α — величина угла, соответствующего дуге окружности.

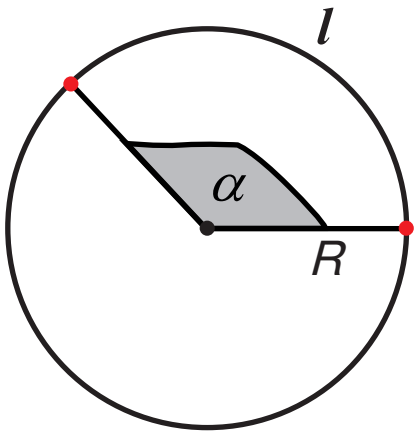


Рис. 15

Если $l = R$, тогда радианная мера угла будет равна 1. Такой угол называется **углом в 1 радиан** (рис. 16).

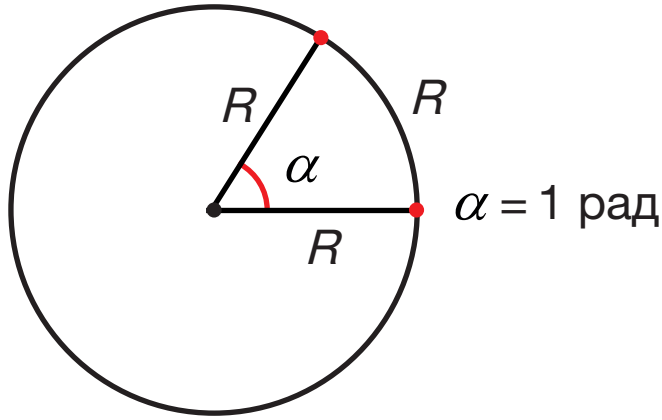


Рис. 16

Величина центрального угла, опирающегося на дугу, длиною, равной длине радиуса окружности, называется **1 радианом**.

1 радиан сокращенно записывают: 1 рад.

Радиан (от лат. radius — «луч», «радиус») — основная единица для измерения плоских углов в математике.

Поскольку в окружности содержится 2π дуг, каждая длиной, равной длине радиуса, то полный угол и длина всей окружности равны по 2π рад (рис. 17).

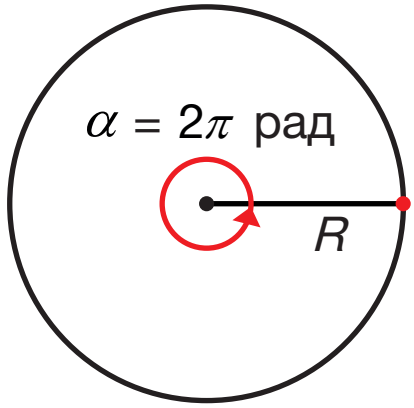


Рис. 17

Радианная мера полуокружности и развернутого угла равны по π рад (рис. 18).

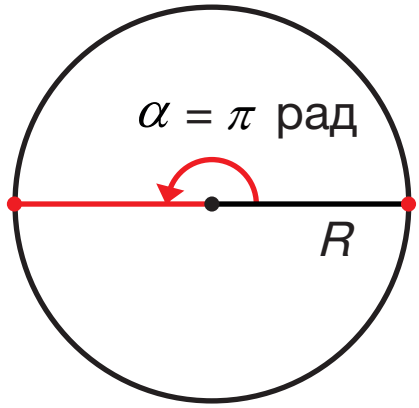


Рис. 18

Поскольку градусная мера дуги полуокружности равна 180°, ***а*** радианная — π рад, то:

1) градусная мера дуги и величина угла в один радиан равна $\frac{180}{\pi}$, т. е. $1_{\text{рад}} = \frac{180}{\pi} \approx 57°17'45''$;

2) радианная мера дуги и величина угла в один градус равна $\frac{\pi}{180}$, т. е.

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0{,}017 \text{ рад}.$$

Величину любого угла, заданного в градусной мере, можно перевести в радианную и, наоборот, величину угла, заданного в радианной мере, можно перевести в градусную меру.

Пусть $\alpha°$ — градусная мера некоторого угла, a — радианная мера того же угла; тогда справедлива следующая пропорция:

$$\alpha° : 180° = a : \pi.$$

Из этой пропорции выразим a рад и $\alpha°$.

Получим формулы:

$$a \text{ рад} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}, \qquad (1)$$

$$\alpha^\circ = \frac{a \cdot 180^\circ}{\pi}. \qquad (2)$$

С помощью формулы (1) переведите в радианы углы: 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 270°, 360°.

Ниже приведена таблица радианной и градусной мер некоторых наиболее часто встречающихся углов (табл. 1).

Таблица 1

α	30°	45°	60°	90°	120°
a рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$

α	135°	150°	180°	270°	360°
a рад	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Как, используя свойства углов и сторон прямоугольного треугольника, без транспортира построить на окружности точки, соответствующие углам 0°, 30°, 45°, 60°, 90° (рис. 19)?

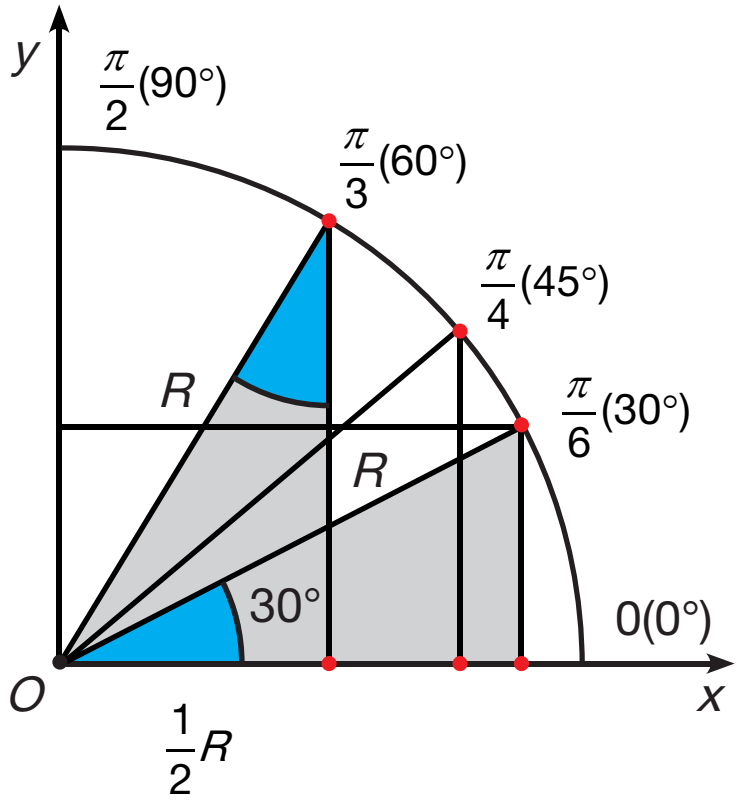


Рис. 19

На окружности (рис. 20) отмечены точки, соответствующие наиболее часто встречающимся углам (в градусах и радианах).

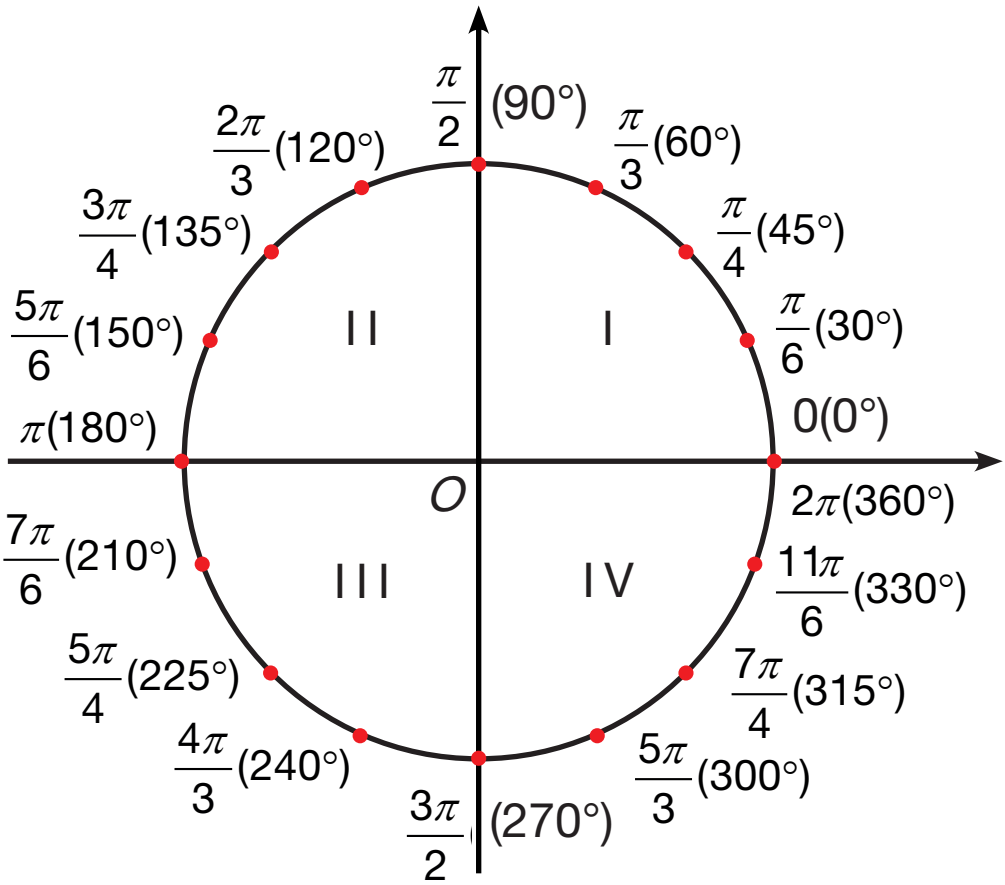


Рис. 20

Пример: 3. Найдем приближенное значение в радианах величины угла 30°.

Решение. Поскольку $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ (рад),

то $30^\circ \approx \frac{3{,}14}{6}$ (рад) $\approx 0{,}52$ (рад),

$30^\circ \approx \frac{3{,}1416}{6}$ (рад) $\approx 0{,}5236$ (рад).

Ответ: $\approx 0{,}52$ рад,

$\approx 0{,}5236$ рад и т. д.

Пример: 4. Найдем приближенное значение в градусах величины угла $a = 0{,}3$ рад.

Решение. Используя формулу $\alpha^\circ = \frac{a \cdot 180^\circ}{\pi}$, получим

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ \cdot 0{,}3}{\pi} \approx \frac{54^\circ}{3{,}14} \approx 17^\circ.$$

Ответ: $\approx 17^\circ$.

Для быстрого перевода любых углов из градусной меры в радианную или из радианной меры в градусную меру во всех справочниках по математике имеются соответствующие таблицы.

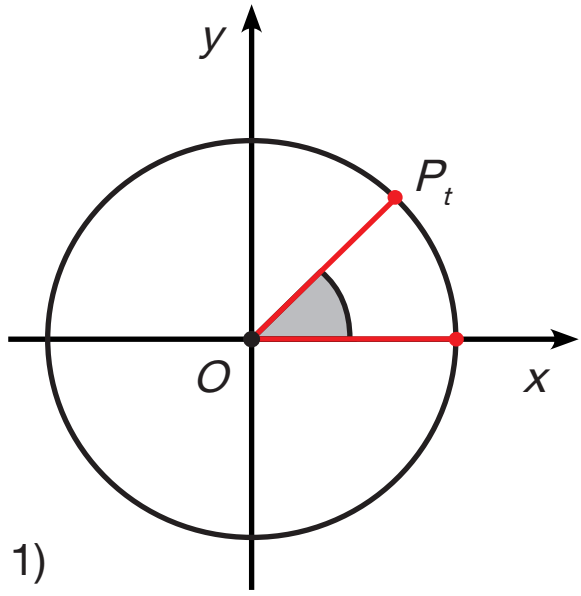
Пример: 5. Найдем все числа (величины углов), которые соответствуют точке P_t числовой окружности (рис. 21).

Ответы:

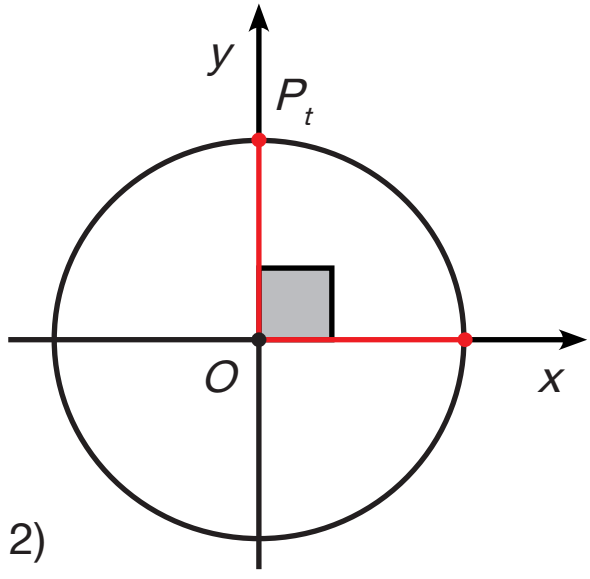
1) $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k — любое целое число;

2) $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, k — любое целое число;

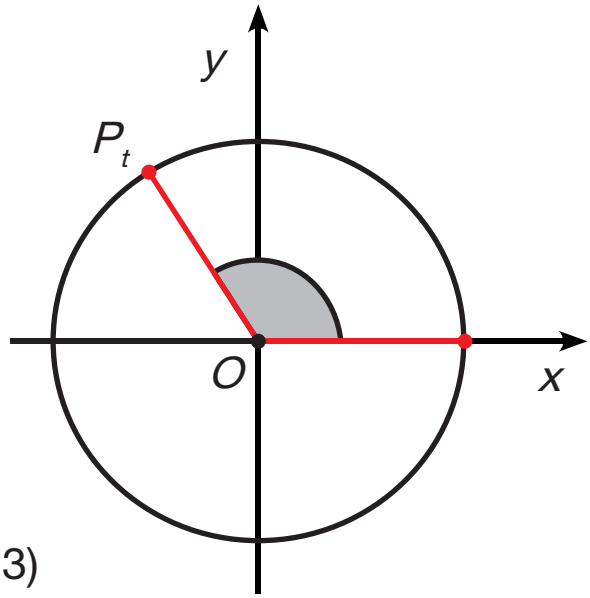
3) $t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k — любое целое число.



1)



2)



3)

Рис. 21

Проверьте правильность приведенных ответов предыдущего примера.

1. Какие углы считаются положительными, какие — отрицательными?
2. В каких единицах измеряют углы?
3. Как перевести радианную меру угла в градусную и наоборот?

A

8.1. Запишите с помощью π радианную меру угла, если его градусная мера равна:

1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 150°; 6) 180°.

8.2. Запишите градусную меру угла, если его радианная мера равна:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{\pi}{2}$.

8.3. 1) Запишите с помощью π в радианах углы равнобедренного прямоугольного треугольника;

2) запишите с помощью π в радианах углы равностороннего треугольника;

3) запишите с помощью π в радианах углы прямоугольника.

8.4. Выразите в градусах угол поворота:

1) 1 рад;
2) 0,4 рад;
3) 2,3 рад;
4) –4,2 рад;
5) –3,5 рад;
6) –10 рад.

8.5. Выразите в радианах заданные в градусах углы:

1) 24°;
2) 240°;
3) 154°;
4) 1025°;
5) 2040°;
6) 2405°.

8.6. Углом какой четверти является угол α, если:

1) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$;
2) $\alpha = \frac{9\pi}{4}$;
3) $\alpha = \frac{16\pi}{5}$;
4) $\alpha = \frac{17\pi}{6}$?

В

8.7. 1) Радианная мера одного из углов ромба равна $0{,}2\pi$. Найдите радианные меры остальных углов ромба.

2) Радианная мера одного из углов ромба равна $0{,}7\pi$. Найдите радианные меры остальных углов ромба.

8.8. 1) Радианная мера одного из углов равнобокой трапеции равна $\frac{\pi}{6}$. Найдите радианные меры остальных углов трапеции.

2) Радианная мера одного из углов равнобокой трапеции равна $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радианные меры остальных углов трапеции.

8.9. Найдите радианную меру угла, смежного углу, содержащего радиан:

1) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{4\pi}{9}$;

2) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 6) $\frac{7\pi}{11}$.

8.10. Представьте в виде $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n$ (где $0 \le \alpha_0 < 2\pi$ и n — целое число) угол α:

1) $\alpha = 2{,}5\pi$; 4) $\alpha = -19{,}7\pi$;

2) $\alpha = 14{,}3\pi$; 5) $\alpha = -\frac{13}{4}\pi$;

3) $\alpha = -2{,}2\pi$; 6) $\alpha = -\frac{23}{6}\pi$.

8.11. В какой четверти находится угол поворота α, если:

1) $\alpha = 3{,}7\pi$; 2) $\alpha = 4{,}2\pi$;

3) $\alpha = -3{,}2\pi$;

4) $\alpha = -9{,}8\pi$;

5) $\alpha = -\frac{14}{5}\pi$;

6) $\alpha = -\frac{25}{7}\pi$?

8.12. На единичной окружности отметьте точку, соответствующую углу α, равному:

1) 30°; 2) 150°; 3) –150°; 4) –270°; 5) 420°; 6) –300°.

8.13. 1) Выразите в радианах внутренние углы равнобедренного треугольника, у которого внешний угол при основании треугольника равен 130°.

2) Выразите в радианах внутренние углы равнобедренного треугольника, у которого внешний угол при вершине треугольника равен 140°.

8.14. 1) Выразите в радианах внутренние углы равнобедренной трапеции, у которой внешний угол при большем основании равен 120°.

2) Выразите в радианах внутренние углы равнобедренной трапеции, у которой внешний угол при большем основании равен 110°.

8.15. Верно ли утверждение:

1) если $0° < \alpha < 90°$, то α — угол первой четверти;

2) если α — угол первой четверти, то $0° < \alpha < 90°$;

3) если $90° < \alpha < 180°$, то α — угол второй четверти;

4) если α — угол второй четверти, то $90° < \alpha < 180°$?

8.16. Угловая скорость колеса равна 23 рад/с. Найдите число полных оборотов колеса в минуту.

8.17. Какой угол (в градусной и радианной мерах) описывает минутная стрелка в течение:

1) 3 ч;
2) 6 ч;
3) 9 ч;
4) суток?

8.18. Постройте на единичной окружности точку:

1) $P_{\frac{\pi}{6}}$;
2) $P_{\frac{5\pi}{6}}$;
3) $P_{\frac{7\pi}{6}}$;
4) $P_{\frac{4\pi}{3}}$;
5) $P_{\frac{5\pi}{3}}$;
6) $P_{\frac{5\pi}{4}}$.

П

8.19. Покажите штриховкой в координатной плоскости решение системы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ y \ge x^2 - 3; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16, \\ y \le x^2 - 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25, \\ y \ge x^2 + 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 4, \\ y \le x^2 + 9. \end{cases}$

8.20. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 6}$;

2) $y = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$;

3) $y = \sqrt{-x^2 - 6x + 8}$;

4) $y = \sqrt{-2x^2 + x + 6}$.

8.21. Найдите значения x, при которых функция $y = \dfrac{2x^2 - 1}{3x + 1}$ принимает значения, равные 2; 3; 4,5.

8.22. На диаграмме (рис. 22) указано количество гвоздик на клумбе.

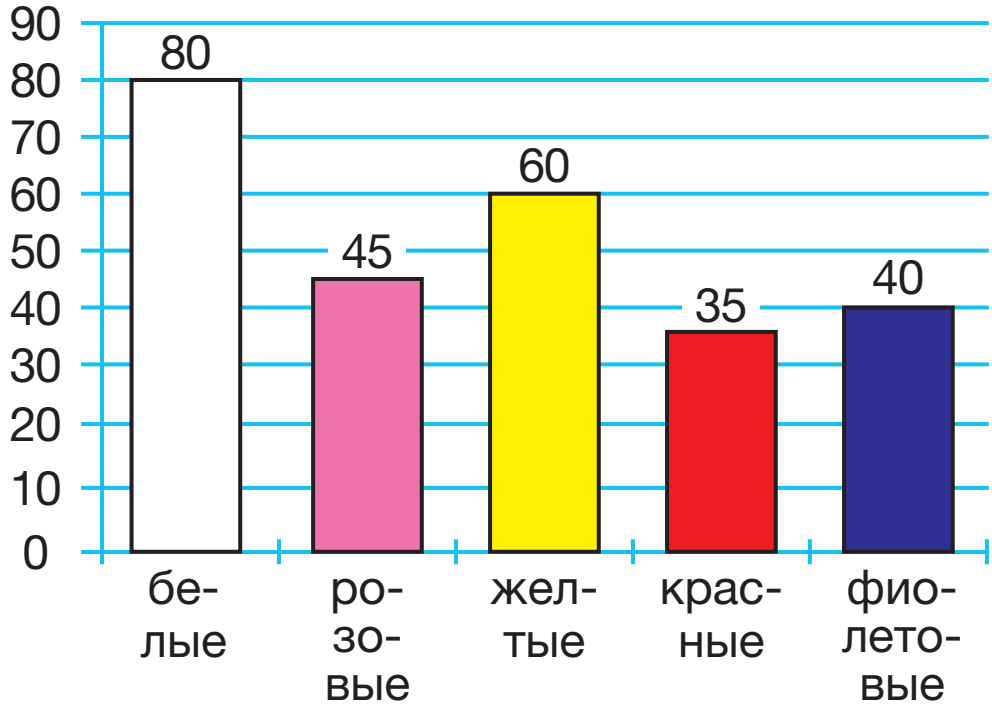


Рис. 22

Выберите верное утверждение, если A — количество желтых и розовых гвоздик, B — количество белых и красных гвоздик:

A) $A = B$; C) $A + 15 < B$; E) $A + 10 = B$.

B) $A > 2B$; D) $A > B$;

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

8.23. Найдите значение выражения:

1) $2\sin 60° - 3tg\,45°$;

2) $2\cos 60° - 3ctg\,45°$;

3) $2\sin 45° - 3ctg\,60°$;

4) $2\sin 30° - 3tg\,30°$.

§ 9. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов

Вы ознакомитесь с определениями тригонометрических функций;
узнаете о взаимосвязи координат точек $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ единичной окружности с тригонометрическими функциями.

До сих пор вы изучали алгебраические функции: $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$; $y = x^n$ и др., которые записывались с помощью алгебраических операций: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения квадратного корня. Но многие жизненные ситуации часто описываются и функциями другого типа, например, **тригонометрическими функциями**.

Для введения тригонометрических функций, кроме числовой прямой, нам потребуется **числовая окружность**.

Вспомните, что такое числовая прямая. Назовите координаты точек M, O, E, K (рис. 23).

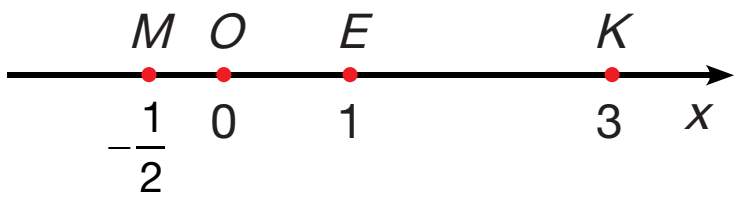


Рис. 23

Вы знаете

Вам известно, что числовая прямая задается прямой, с указанием на ней: 1) начальной точки O, 2) единичного отрезка и 3) положительного направления. Любое действительное число можно отметить точкой на этой прямой и обратно — каждой точке числовой прямой соответствует некоторое действительное число.

Также вам известно, что координата любой точки на числовой прямой выражается положительным или отрицательным числом в зависимости, где эта точка расположена относительно начальной точки O.

Числовой окружностью называется окружность, на которой указана начальная точка, единичная дуга, положительное направление.

Для построения числовой окружности надо:

1) построить окружность;

2) отметить начальную точку;

3) принять за единицу длину дуги, равную длине радиуса окружности;

4) принять направление против движения часовой стрелки за положительное, по часовой стрелке — за отрицательное (рис. 24).

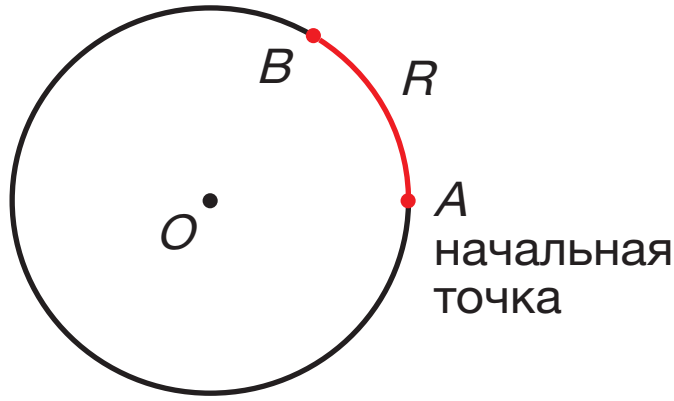


Рис. 24

По аналогии с числовой прямой, действительное число z можно отметить такой точкой B на числовой окружности, которая является концом дуги $AB = z$ рад. Это число называют **круговой координатой** точки B и пишут $B(z)$.

Нетрудно понять, что таким путем всякому действительному числу будет поставлена в соответствие определенная точка окружности. Так, числу 0 будет соответствовать начальная точка A, числу 1 будет соответствовать точка E — конец дуги $AE = 1$ рад, числу 2 будет соответствовать точка F — конец дуги $AF = 2$ рад, числу 6,5 будет соответствовать точка, служащая концом дуги в 6,5 рад (при условии, что началом дуги является A). Всякому отрицательному числу будет соответствовать точка, служащая концом отрицательной дуги. Например, числу $z = -2$ будет соответствовать точка F' —конец отрицательной дуги $AF' = -2$ рад (рис. 25).

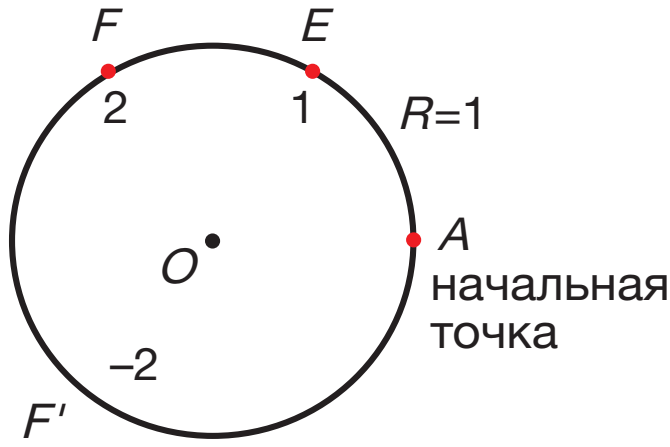


Рис. 25

1. В чем сходство и в чем отличие числовой прямой и числовой окружности?
2. Каждому ли действительному числу соответствует единственная точка на числовой прямой (на числовой окружности)?
3. Каждой ли точке числовой прямой (числовой окружности) соответствует единственное действительное число?

Каждой точке B числовой окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел.

В курсе геометрии были определены синус, косинус и тангенс острого угла α.

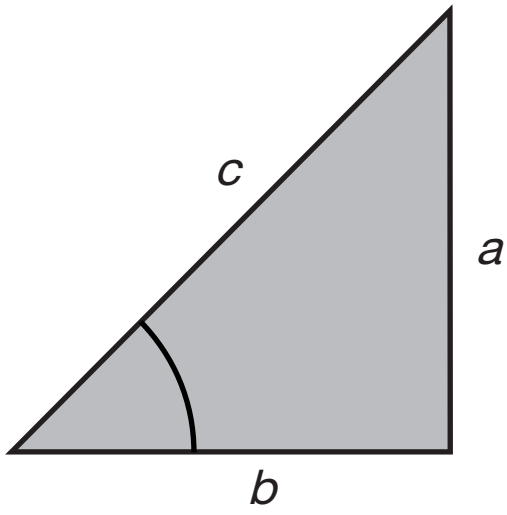


Рис. 26

Вспомните, что называется $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$, где α острый угол прямоугольного треугольника (рис. 26).

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad tg\alpha = \frac{a}{b},$$

$$ctg\alpha = \frac{b}{a}.$$

Д Благодаря работам знаменитого арабского ученого Насир эд-Дина тригонометрия становится самостоятельной научной дисциплиной. Насир эд-Дин рассмотрел все случаи решения плоских и сферических треугольников.

Насир эд-Дин (1201–1274)

Слово «тригонометрия» составлено из двух греческих слов: **тригонон** — «треугольник» и **метрео** — «измеряю».

Введем определения для угла α произвольной величины. Для этого сначала рассмотрим числовую окружность, построенную в системе координат.

В прямоугольной системе координат построим окружность с центром в начале координат (рис. 27).

Например, если конец подвижного радиуса OB — точка B лежит во II четвер-

ти, то угол α заканчивается во II четверти (рис. 28).

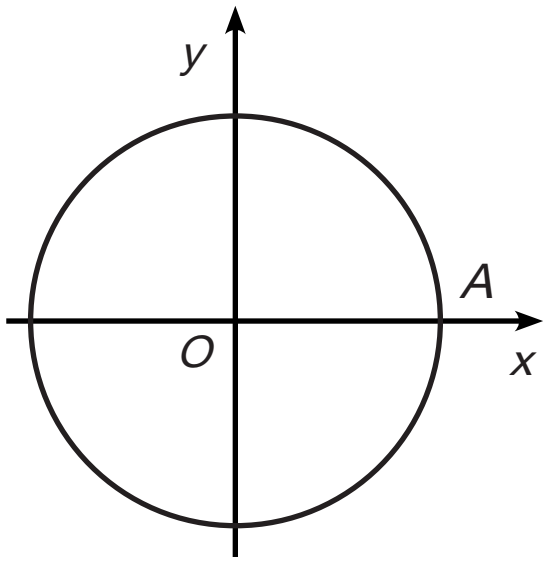


Рис. 27

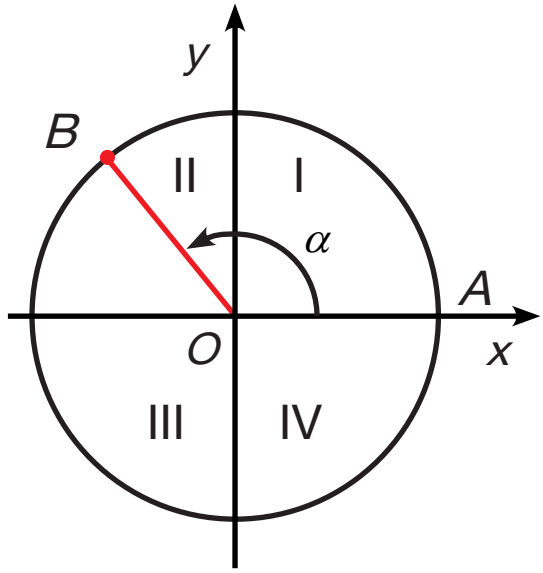
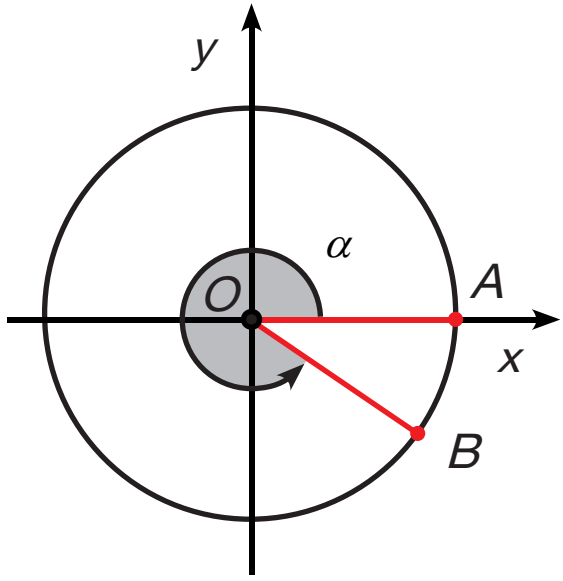
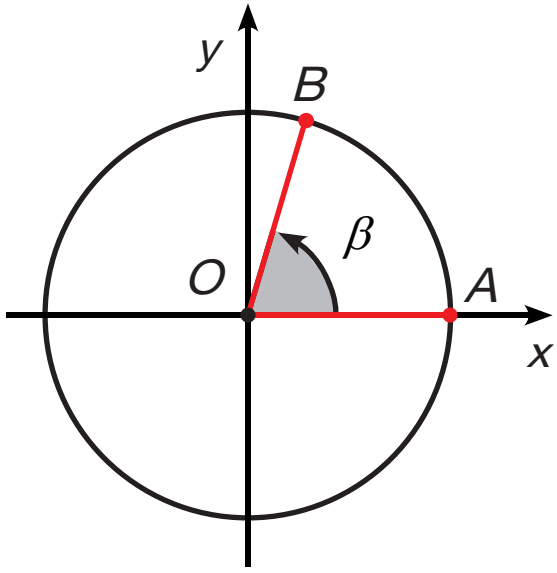
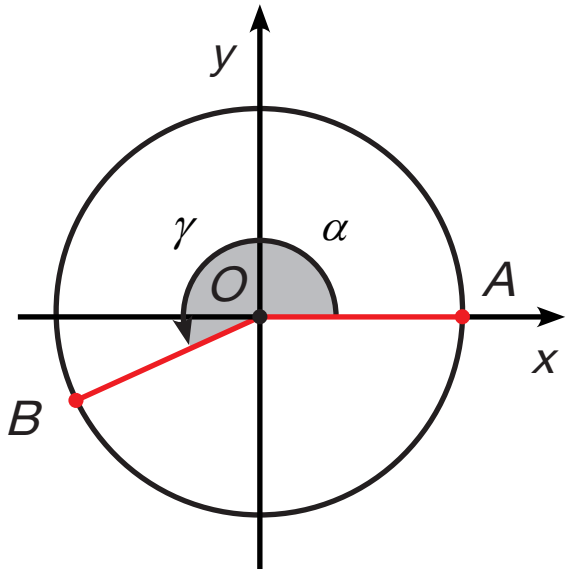


Рис. 28

Углом какой четверти является угол α, β, γ, φ (рис. 29)?







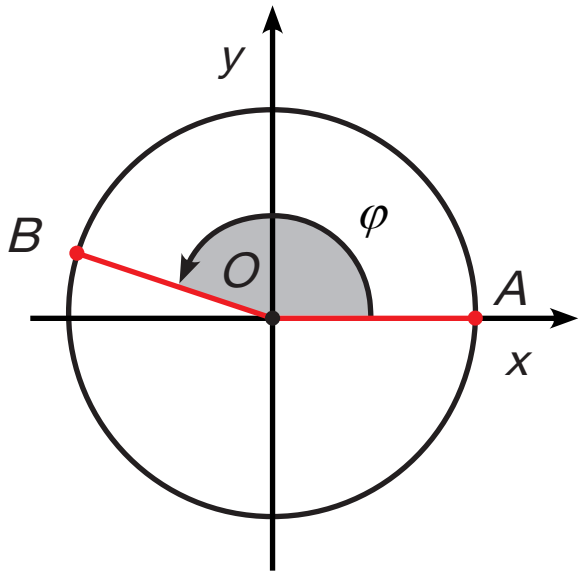


Рис. 29

Углы, кратные $\frac{\pi}{2}$, не заканчиваются ни в какой четверти.

Пусть при повороте вокруг точки O на угол α начальный радиус OA займет положение радиуса OB (рис. 30).

Используя известные определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла для прямоугольного треугольника OBC (рис. 30), сформулируем определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для любого угла следующим образом.

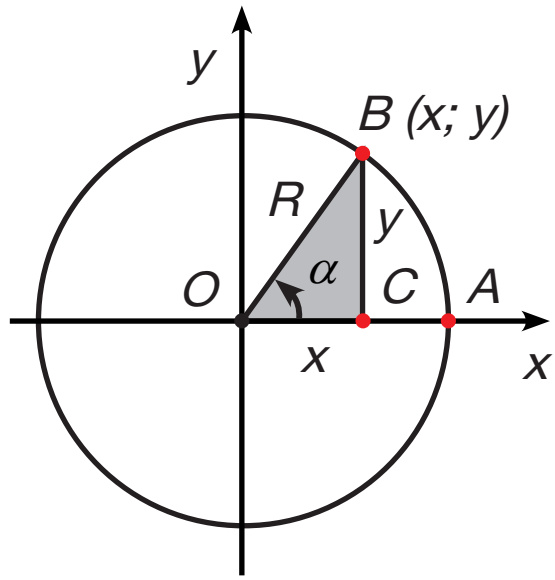


Рис. 30

Синусом угла α называется отношение ординаты точки B, лежащей на окружности, к ее радиусу.

Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки B, лежащей на окружности, к ее радиусу.

Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки B, лежащей на окружности, к ее абсциссе.

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки B, лежащей на окружности, к ее ординате.

Если координаты точки B обозначим буквами x и y, а длину радиуса окружности буквой R, то получим равенства:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R};\ \cos\alpha = \frac{x}{R};\ tg\alpha = \frac{y}{x};\ ctg\alpha = \frac{x}{y}.$$

Для данного угла α отношения: $\frac{y}{R}$, $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ постоянные, поэтому их величина не зависит от длины радиуса. Действительно, пусть B_1 является любой точкой, лежащей на подвижном радиусе OB или на его продолжении (рис. 31).

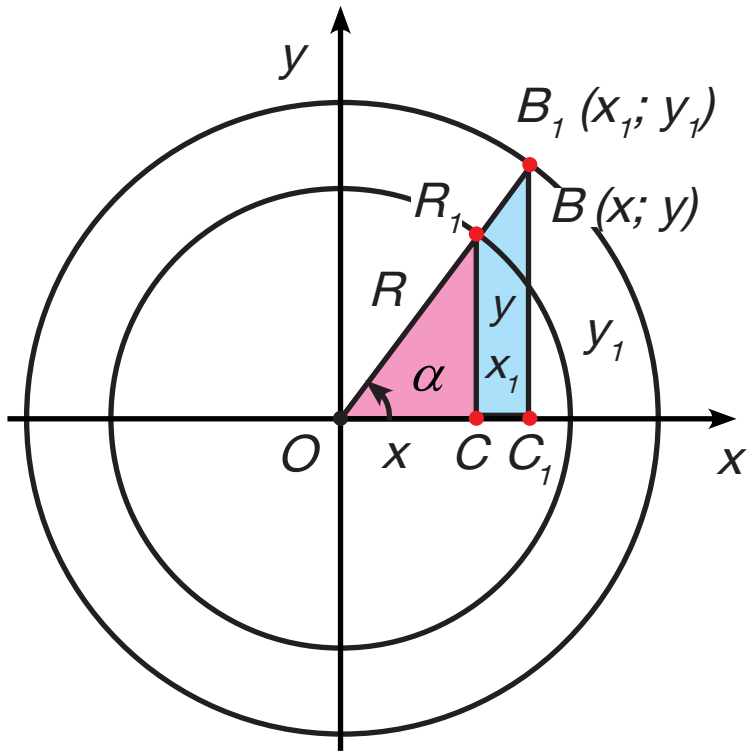


Рис. 31

Тогда из подобия треугольников OBC и $O_1B_1C_1$ получим:

$$\frac{y}{R}=\frac{y_1}{R_1};\ \frac{x}{R}=\frac{x_1}{R_1};\ \frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1};\ \frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}$$

где $R_1 = OB_1$, а x_1 и y_1 — координаты точки B_1.

Поскольку $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ не зависят от длины радиуса, то рассматривают окружность, длина радиуса которого равна 1. Такую окружность называют **единичной окружностью**.

Таким образом, значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ зависят только от величины угла α. При этом каждому углу α соответствует единственное значение синуса, косинуса, тангенса (за исключением углов $\frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k \in Z$) и котангенса (за исключением углов πk, где $k \in Z$) этого угла.

Зависимости синуса, косинуса, тангенса и котангенса от величины угла α называются **тригонометрическими функциями**.

Обозначение тригонометрических функций: $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = tg\alpha$, $y = ctg\alpha$.

Тригонометрические функции можно рассматривать как функции, зависящие от числа, так как угол наряду с градусной мерой имеет и радианную меру. Следовательно, тригонометрические функции в α радиан можно рассматривать как тригонометрические функции, зависящие от числа a.

Пример: 1. Найдем тригонометрические функции угла α, конечная сторона которого проходит через точку окружности B (3; –2) (рис. 32).

Решение. $x = 3;\ y = -2$, поэтому,

$$R = \sqrt{9+4} = \sqrt{13};\ \sin\alpha = \frac{y}{R} = \frac{2\sqrt{13}}{13};$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R} = \frac{3\sqrt{13}}{13};\ tg\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{2}{3};$$

$$ctg\alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} = -1{,}5.$$

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13};\ \cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13};$

$$tg\alpha = -\frac{2}{3};\ ctg\alpha = -1{,}5.$$

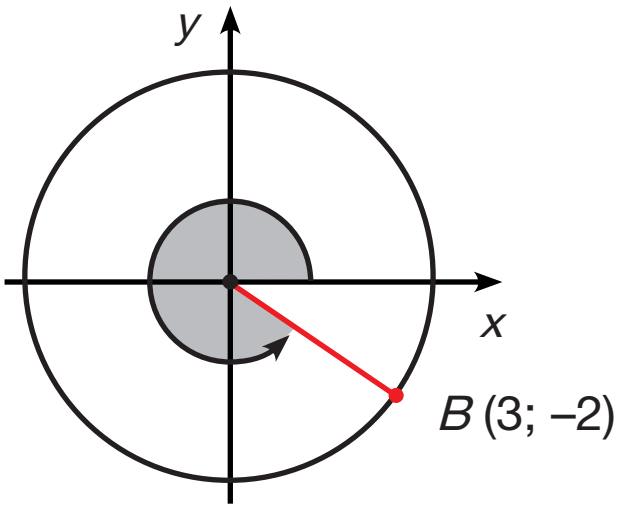


Рис. 32

Пример: 2. Найдем значения тригонометрических функций углов: 1) 0°; 2) 180°; 3) 270° (рис. 33).

Решение. 1) Если $\alpha = 0°$, то, следовательно $\sin 0° = 0,\ \cos 0° = 1,\ tg\,0° = \frac{0}{R} = 0,$ $ctg\,0° = \frac{R}{0}$ — не существует.

2) Если $\alpha = 180°$, $x = -R$, $y = 0$, то, следовательно $|OA| = |OB| = R$ и $\sin 180° = \frac{0}{R} = 0,$ $\cos 180° = \frac{-R}{R} = -1;$ $tg\,180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{R} = 0,$ $ctg\,180° = \frac{x}{y} = \frac{R}{0}$ — не существует.

3) Если $\alpha = 270°$, то конечная сторона угла совпадает с отрицательным направлением оси Oy, поэтому $x = 0$ и $y = -R$.

Ответ: 1) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $tg\,0^\circ = 0$, $ctg\,0^\circ$ — не существует.

2) $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $tg\,180^\circ = 0$, $ctg\,180^\circ$ — не существует;

3) $\sin 270^\circ = -1$, $\cos 270^\circ = 0$, $ctg\,270^\circ = 0$, $tg\,270^\circ$ — не существует.

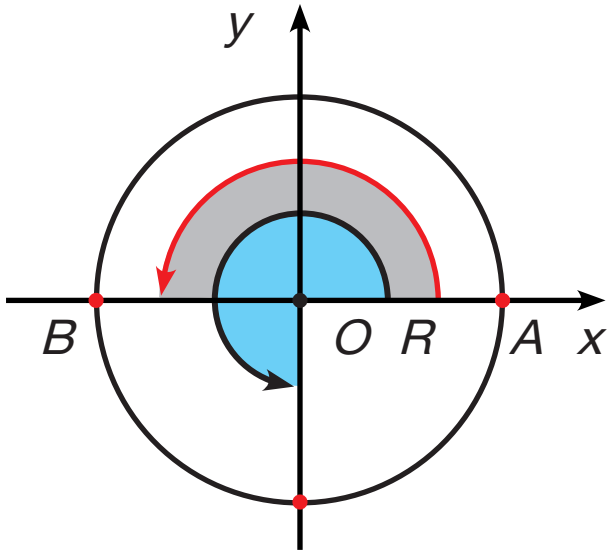


Рис. 33

В таблице 2 записаны значения тригонометрических функций угла α, заданного в радианах (градусах), которые часто применяются при решении задач.

Таблица 2

Угол α	Значение угла в радианах (градусах)				
Функция	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.
$ctg\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Угол α	Значение угла в радианах (градусах)				
Функ-ция	$\frac{2\pi}{3}$ (120°)	$\frac{5\pi}{6}$ (150°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$tg\alpha$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0
$ctg\alpha$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.

Пример: 3. Вычислим значение выражения: $2\cos 0° + 3\sin 90° + 4tg45°$.

Решение. Используя составленную таблицу 6, получим:

$$2\cos 0° + 3\sin 90° + 4tg45° = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9.$$

Ответ: 9.

1. Какие функции называются тригонометрическими функциями?
2. Что такое числовая окружность?
3. Что такое синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла?

9.1. Какой четверти принадлежит угол $\frac{\pi}{3}$; 120; $\frac{5\pi}{6}$; 289°?

9.2. Найдите значения выражений:

1) $2\sin 30° + \cos 45°$;

2) $tg\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}ctg\frac{\pi}{6}$;

3) $3\cos\frac{\pi}{3} - 2tg45°$.

9.3. Начертите единичную окружность с центром в начале координат, поверните начальный радиус на угол α, где α равна:

1) 35°; 3) 135°; 5) –80°;

2) 75°; 4) 170°; 6) –130°.

9.4. Найдите значение выражения:

1) $2\sin 30° + 2\cos 45°$;

2) $3\sin 60° - 2\cos 60°$;

3) $\sin 30° - 3tg45°$;

4) $\sin 45° + 2\text{c}\,tg60°$.

9.5. Чему равно значение выражения:

1) $tg\frac{\pi}{3}+2ctg\frac{\pi}{6}$;

2) $tg\frac{\pi}{4}-3ctg\frac{5\pi}{6}$;

3) $3\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{4}$;

4) $-\sin\frac{\pi}{2}+2\text{c}\,tg\frac{3\pi}{4}$?

9.6. Найдите несколько значений α, при которых:

1) $\sin\alpha=0$;

2) $\sin\alpha=0{,}5$;

3) $\cos\alpha=-1$;

4) $\cos\alpha=1$;

5) $\cos\alpha=0$;

6) $\sin\alpha=-1$.

9.7. Найдите несколько значений β, при которых:

1) $tg\beta = 0$;
2) $tg\beta = 1$;
3) $tg\beta = -1$;
4) $ctg\beta = 1$;
5) $ctg\beta = -1$;
6) $ctg\beta = 0$.

9.8. Найдите значение выражения:

1) $2\cos 0° + 3tg45° - \sin 120°$;
2) $\sin 270° + 3tg180°$;
3) $\cos 90° - 3\sin 360° + 2tg180°$.

9.9. Укажите несколько значений угла β, при которых не имеет смысла выражение:

1) $tg\beta$;
2) $ctg\beta$;
3) $ctg2\beta$;
4) $tg2\beta$.

9.10. Чему равны значения выражений:

1) $\cos 180° \cdot \cos 60° - 2\sin 45°$;

2) $\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} + 5ctg\frac{\pi}{4} - 5\sin\frac{\pi}{2}$?

9.11. Вычислите:

1) $\cos 60° + 2\sin 30° + \frac{1}{2}tg^2 60° - ctg45°$;

2) $3\cos 180° + 5ctg270° - 2tg0° - tg60°$.

9.12. Найдите значение выражения:

1) $\sin\frac{\pi}{6}\left(tg\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $tg\frac{\pi}{6}\left(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $\cos\frac{\pi}{4}\left(ctg\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\right)$.

9.13. Вычислите значение выражения:

1) $-\sin\frac{\pi}{2}\left(2tg\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}\right)$;

2) $ctg\frac{\pi}{6}\left(\sin\frac{\pi}{3}-3\cos\frac{\pi}{3}\right)$;

3) $\cos\frac{\pi}{4}\left(2ctg\frac{\pi}{4}-3\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

9.14. 1) Выразите значение суммы чисел $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$ через:

1) синусы острых углов;
2) косинусы острых углов.

9.15. Выразите значение алгебраической суммы чисел $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ через:

1) синусы острых углов;
2) косинусы острых углов.

9.16. Выразите значение алгебраической суммы чисел $\frac{\sqrt{3}}{3}-1$ через:

1) тангенсы острых углов;
2) котангенсы острых углов.

9.17. Найдите значение выражения $\sin\alpha+\cos\alpha$, если:

1) $\alpha=0°$;
2) $\alpha=120°$;
3) $\alpha=30°$;
4) $\alpha=135°$.

9.18. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{(-\sin 30°-\cos 30°)^2}{3\cos 45°\sin 45°-6tg30°ctg60°}$;

2) $\dfrac{2tg^2\dfrac{\pi}{3}\cos\pi-1}{\sin\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{3}tg\dfrac{\pi}{4}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{(\cos 60^\circ - \sin 60^\circ)^2}}{\sin 30^\circ \cdot (1 - tg 60^\circ)}$;

4) $\dfrac{\sqrt{\left(tg\dfrac{\pi}{6} - tg\dfrac{\pi}{3}\right)^2}}{\left(ctg\dfrac{\pi}{6} - ctg\dfrac{\pi}{3}\right)^2}$.

9.19. Найдите несколько значений α, при которых равно нулю значение выражения:

1) $\cos\alpha \cdot tg\alpha$;

2) $\sin\alpha \cdot ctg\alpha$;

3) $\sin\alpha + \cos\alpha$.

9.20. Проверьте, является ли последовательность $\dfrac{1}{tg\dfrac{\pi}{6}}$, $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$, $\dfrac{1}{ctg\dfrac{\pi}{6}}$ арифметической прогрессией.

9.21. Найдите четыре значения α, при которых:

1) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9.22. Найдите четыре значения α, при которых:

1) $\cos\alpha = -0,5$;

2) $tg\alpha = \sqrt{3}$;

3) $ctg\alpha = -\sqrt{3}$.

9.23. Найдите значение выражения:

1) $2tg30^\circ ctg30^\circ \cos 30^\circ \sin 30^\circ + \sqrt{3}tg60^\circ$;

2) $\dfrac{4 \cdot \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos\pi} + 2$.

9.24. Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt{\frac{3}{4}+2\cos^2 30^\circ}+\sqrt{\frac{5}{4}-3tg^2 30^\circ}$;

2) $\sqrt{tg^2\frac{\pi}{3}-2\frac{3}{2}-\sin\frac{3\pi}{4}}$?

9.25. Известно, что $\sin\alpha=0{,}5$.

1) Верно ли, что $\alpha=30^\circ$?
2) Укажите несколько углов, синус которых равен 0,5.
3) Укажите в общем виде все углы, синус которых равен 0,5.

9.26. Известно, что $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Верно ли, что $\alpha=45^\circ$?
2) Укажите несколько углов, косинус которых равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Укажите в общем виде все углы, синус которых равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9.27. Возможно ли равенство:

1) $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 3$;

2) $3\sin\alpha - 2\cos\alpha = 5$;

3) $\sin\alpha - 7\cos\alpha = -8$;

4) $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 1$?

9.28. Сравните значения выражений $A = 2\cos\beta$ и $B = 3tg\beta$, если:

1) $\beta = 30°$;

2) $\beta = 45°$;

3) $\beta = 60°$.

C

9.29. В какой четверти находится угол α, если:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = -1{,}3$;

2) $\sin\alpha - \cos\alpha = 1{,}3$?

9.30. Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt{\sin 150°}$;

2) $\sqrt{-\cos 180°}$;

3) $\sqrt{\cos 120°}$;

4) $\sqrt{tg\,180°}$?

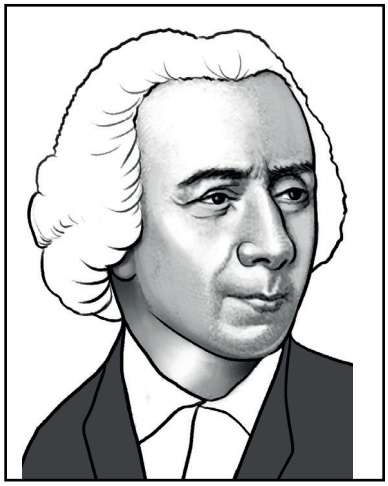
9.31. Сравните значения выражений $A = -3\sin\beta$ и $B = -2\cos\beta$, если:

1) $\beta = 30°$;

2) $\beta = 45°$;

3) $\beta = 60°$.

Подготовьте сообщение об ученых математики и астрономии



Леонард Эйлер (1707–1783)

Регионтан (1436–1476)

1) В середине XVIII в. благодаря швейцарскому математику Леонарду Эйлеру, тригонометрия приняла современный вид. Ученый разработал ее как науку о тригонометрических функциях, ввел записи $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, стороны ΔABC обозначил через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и углы, противоположные этим сторонам, соответственно через A, B, C.

Л. Эйлер рассматривал тригонометрические функции аргумента $\boldsymbol{x}$ — радианной меры соответствующего угла, давая этому аргументу различные значения:

положительные, отрицательные и даже комплексные. Он же ввел и обратные тригонометрические функции.

2) Выдающийся немецкий астроном XV века Регионтан составил таблицу синусов плоских углов с точностью до седьмой значащей цифры.

П

9.32. Найдите значение суммы и значение произведения корней уравнения:

1) $3x^2 - 5x - 27 = 0;$

2) $5x^2 - 7x - 1{,}2 = 0;$

3) $3{,}5x^2 - 7{,}6x + 1 = 0.$

9.33. Решите неравенство и укажите наибольшее целое решение неравенства:

1) $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x-3)^2} < 0;$

2) $\dfrac{x^2-4x-5}{(x+2)^4}<0;$

3) $\dfrac{7}{x^2-5x+6}+1<\dfrac{9}{3-x}.$

9.34. Выясните, является ли функция четной или нечетной, и постройте ее график.

1) $y=x^2+6|x|-2;$

2) $y=-2x^2+4|x|+1;$

3) $y=\dfrac{2}{1+x^2};$

4) $y=\dfrac{x^2-1}{x}.$

9.35. Найдите все целые положительные значения переменной x, удовлетворяющие двойному неравенству:

1) $1<\dfrac{x+2}{5-x}<6;$

2) $-1<\dfrac{x-8}{x+1}<3.$

9.36. На координатной плоскости изобразите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2 \le x \le 6, \\ -1 \le y \le 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ -1 \le y \le 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ y \le 3 - x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ y \le x^2 - 1. \end{cases}$

9.37. Фермер и его сын выполнили некоторую работу за 6 часов. За сколько часов каждый из них мог бы выполнить эту работу, если сын затратил на нее на 5 ч больше, чем отец?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

9.38. Найдите множество значений функции:

1) $y = x^2 - 4x + 1$;

2) $y = -x^2 + 2x + 3$;

3) $y = \sqrt{x+1} - 1$;

4) $y = 2 - \sqrt{1-x}$.

9.39. На одной координатной плоскости постройте график функции и найдите координаты их точек пересечения (приближенно):

1) $y = x^2 - 2x$ и $y = x - 2$;

2) $y = -x^2 - 4x$ и $y = x^2 - 2$.

§ 10. Тригонометрические функции и их свойства

Вы научитесь находить с помощью единичной окружности область определения и множество значений тригонометрических функций; объяснять с помощью единичной окружности четность (нечетность), периодичность, монотонность и промежутки знакопостоянства тригонометрических функций.

Области определения и множество значений тригонометрических функций

Поскольку $\sin\alpha$ — это ордината точки единичной окружности, а $\cos\alpha$ — это абсцисса точки единичной окружности, то при любых значениях аргумента α функции $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$ имеют определенные значения. Следовательно, области определения этих функций будут числовые промежутки $(-\infty;\ +\infty)$.

Области определения функций $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$ — $(-\infty;\ +\infty)$.

Причем, какое бы значение α не принимало, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ не превышает 1 и не меньше –1, потому что и абсцисса, и ордината точки B — конца подвижного радиуса OB по модулю не больше длины этого радиуса, т. е. 1.

Таким образом, значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ принадлежат числовому отрезку [–1; 1].

Множество значений функций $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$ [–1; 1].

Выше показано, что значения $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ выражаются отношением координат точки B.

В этих отношениях, если абсцисса точки B равна нулю, то $tg\alpha$ не имеет значения, а если ордината точки B равна нулю, то $ctg\alpha$ не имеет значения (потому что зна-

менатель дроби не может быть равным нулю).

Следовательно, значения α, равные $\pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2}$ и т. д., не входят в область определения $tg\alpha$; а значения α, равные 0, $\pm\pi$; $\pm 2\pi$ и т. д., не входят в область определения $ctg\alpha$.

Объединив эти углы получим, что:

Области определения функций:

— $y = tg\alpha$ все значения α, за исключением $\frac{\pi}{2} + \pi k$ (где k — любое целое число);

— $y = ctg\alpha$ все значения α, за исключением πk (где k — любое целое число).

Вычислите значение дроби $\frac{1}{n}$ при $\boldsymbol{n}$, равном:

1) 0,1; 0,01; 0, 00001; 0,000000001. Что происходит со значением дроби с числителем 1 и положительным знаменателем при его уменьшении до 0?
2) –0,1; –0,01; –0, 00001; –0,000000001. Что происходит со значением дроби с числителем 1 и отрицательным знаменателем при увеличении знаменателя до 0?

Поскольку $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $|\sin\alpha| \le 1$, $|\cos\alpha| \le 1$, то с уменьшением знаменателя до нуля значение дроби изменяется до бесконечности: увеличивается до $+\infty$, если знаменатель положительное число и уменьшается до $-\infty$, если знаменатель отрицательное число.

Множество значений функций
$y = tg\alpha$, $y = ctg\alpha$ – $(-\infty;\ +\infty)$.

Промежутки знакопостоянства тригонометрических функций

Из определения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ следует, что знаки («+» и «–») каждой тригонометрической функции $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = tg\alpha$, $y = ctg\alpha$ зависят от знаков координат конца подвижного радиуса, т. е. от того, в какой координатной четверти лежит этот конец.

Найдите знаки абсциссы и ординаты точек: A, B, C, P, K единичной окружности (рис. 34).

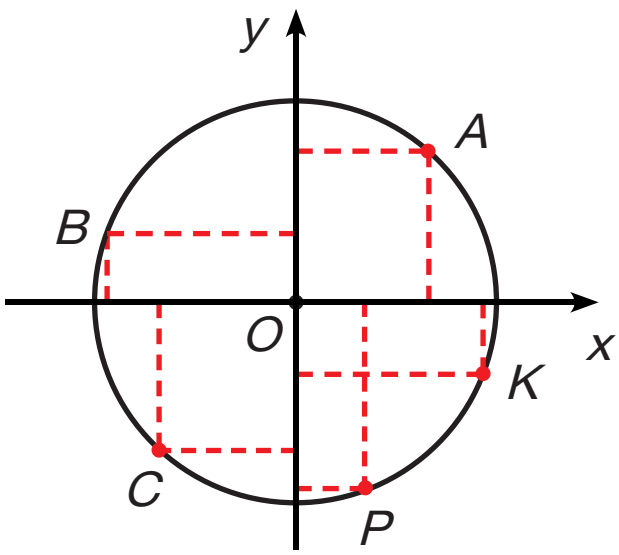


Рис. 34

Когда точка B находится на верхней полуокружности, ее ордината y положительна, а при переходе точки B на нижнюю полуокружность ее ордината y становится отрицательной. Поскольку знак синуса угла по определению зависит от знака ординаты y, то получим, что в I и II четверти $\sin\alpha > 0$, а в III и IV четверти $\sin\alpha < 0$, (рис. 35).

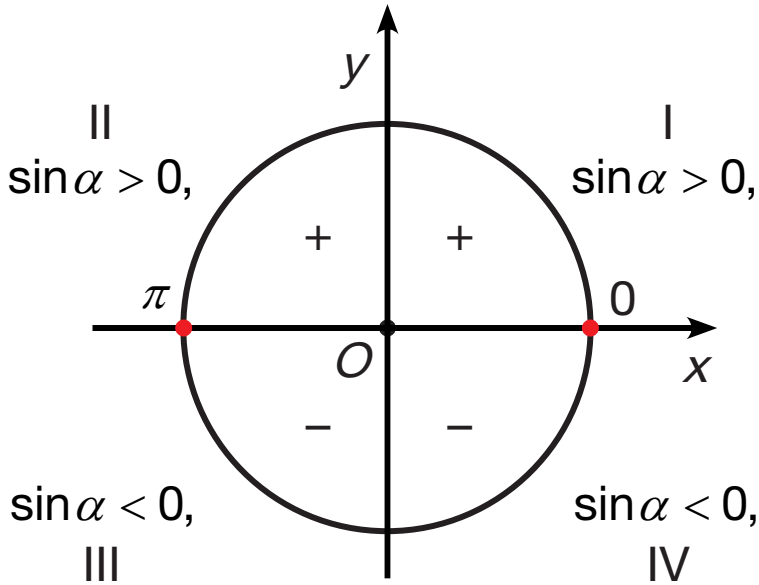


Рис. 35

Из определения косинуса получим, что знак косинуса угла зависит от знака абс-

циссы ***x*** точки единичной окружности. Когда точка B находится на правой полуокружности, абсцисса ***x*** имеет положительный знак, а когда точка B находится на левой полуокружности, абсцисса ***x*** имеет отрицательный знак (рис. 36).

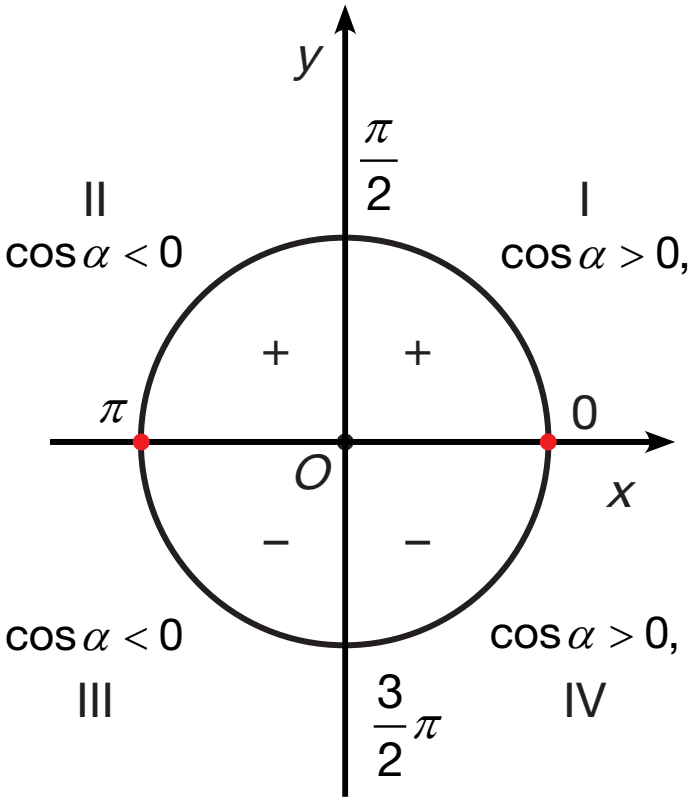


Рис. 36

Таким образом, в I и IV четверти $\cos\alpha > 0$, в III и II четверти $\cos\alpha < 0$.

Поскольку $tg\alpha = \frac{y}{x}$, $ctg\alpha = \frac{x}{y}$, то знаки этих функций положительны в тех координатных четвертях, когда координаты точки B имеют одинаковые знаки, и отрицательны в тех четвертях, когда координаты точки B имеют противоположные знаки.

Следовательно, в I и III четверти $tg\alpha > 0$, $ctg\alpha > 0$, во II и IV четверти $tg\alpha < 0$, $ctg\alpha < 0$ (рис. 37).

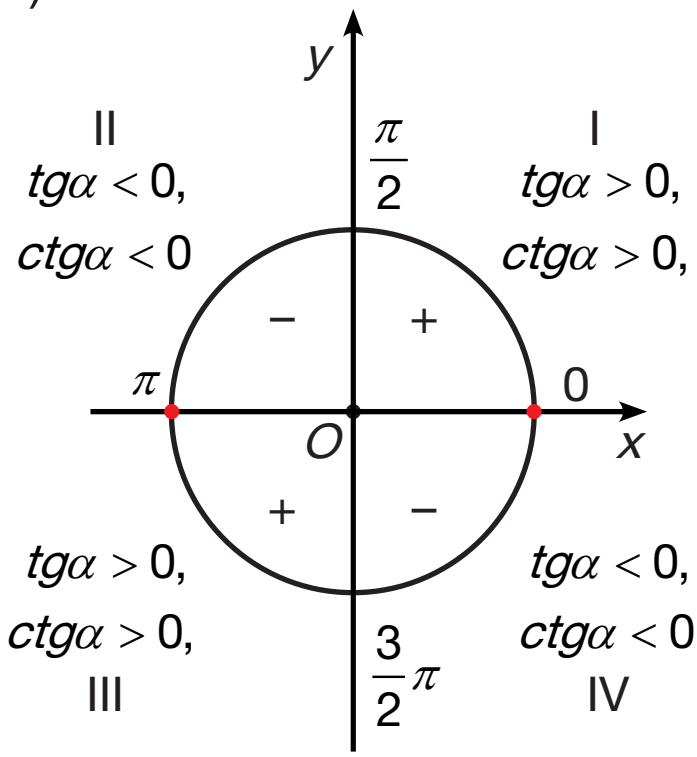


Рис. 37

На рисунке 38 показаны знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α.

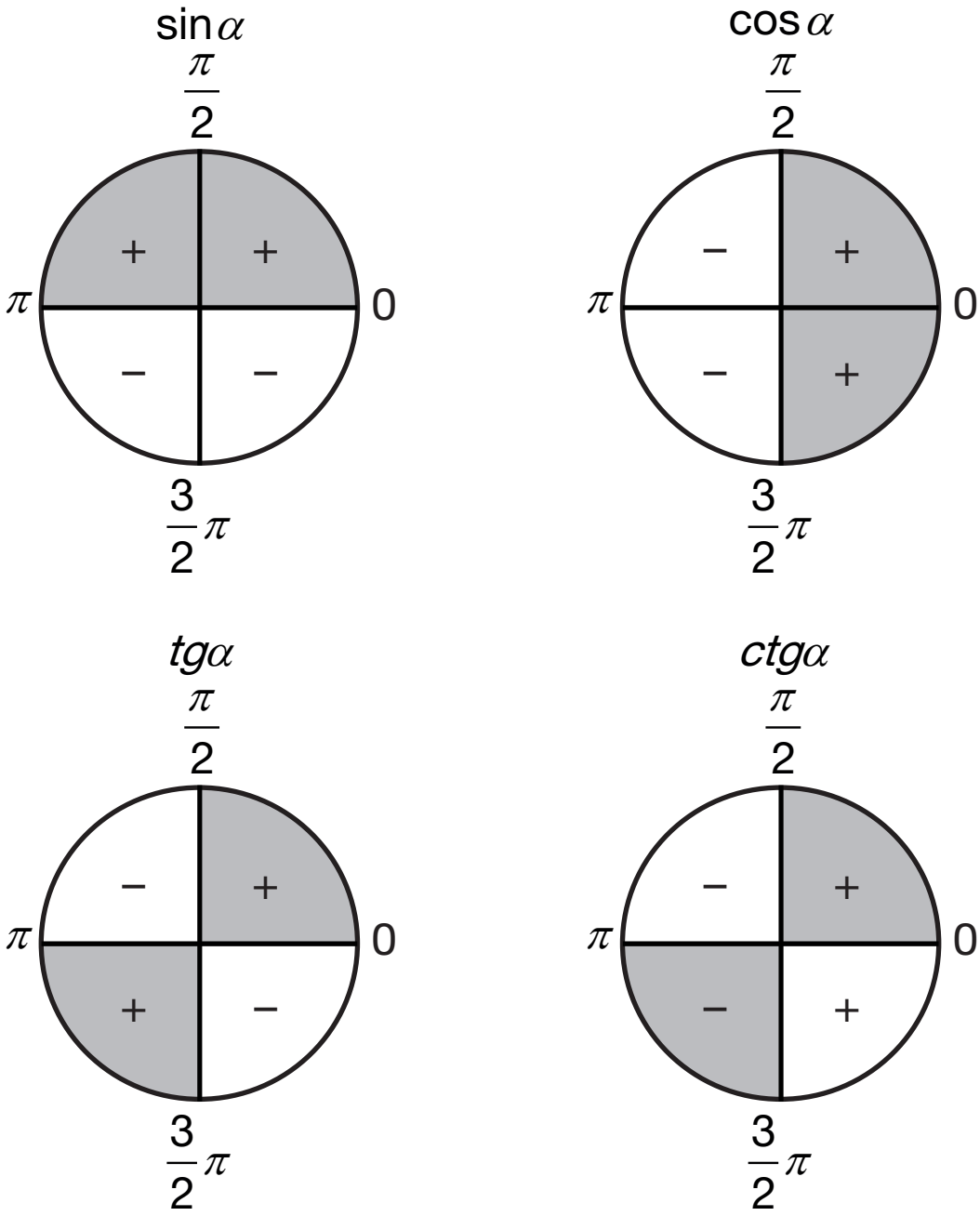


Рис. 38

В таблице 3 записаны знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α.

Таблица 3

Четверти	I	II
Знаки	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
$\sin\alpha$	+	+
$\cos\alpha$	+	-
$tg\alpha$	+	-
$ctg\alpha$	+	-

Четверти	III	VI
Знаки	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin\alpha$	-	-
$\cos\alpha$	-	+
$tg\alpha$	+	-
$ctg\alpha$	+	-

Периодичность тригонометрических функций

Выше рассмотрен случай, когда подвижной радиус совершил только один полный оборот. Известно, что если подвижной радиус и дальше продолжит вращение, то его конец снова займет одно из положений, которые имели место от 0 до 2π. И эти положения не изменяются при увеличении числа полных оборотов подвижного радиуса.

Если к α прибавить 2π целое число раз, то от этого не изменятся значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α.

На рисунке 39 при повороте радиуса OA и на угол α, и на угол $\alpha + 360°$, и на угол $\alpha + 2 \cdot 360°$ и т. д. получится один и тот же радиус OB, поэтому для углов α, $\alpha + 360°$, $\alpha + 2 \cdot 360°$ и т. д. значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса будут одни и те же.

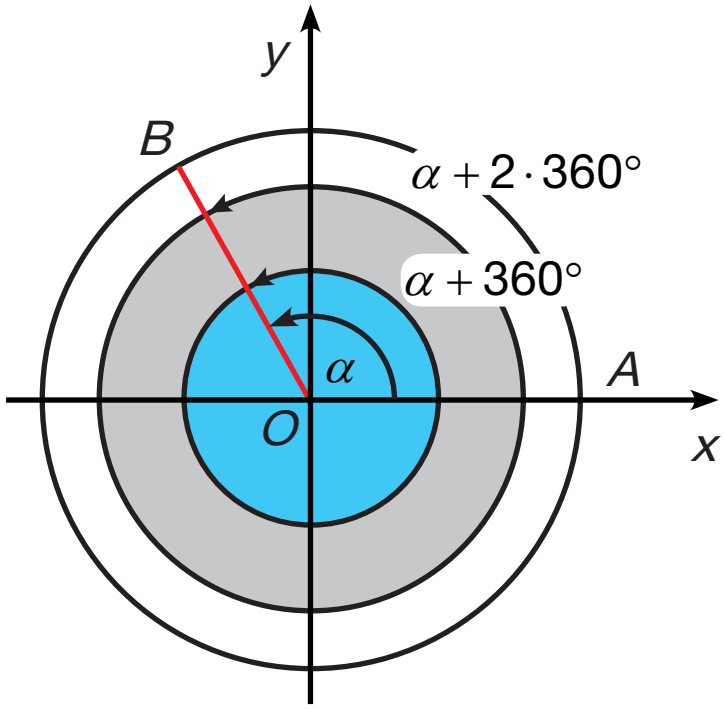


Рис. 39

Пример: 1. $\sin 45° = \sin(45° + 360°) =$

$= \sin(45° - 360°) = \sin(45° + 2 \cdot 360°) =$

$= \sin(45° - 2 \cdot 360°) = \sin(45° + 3 \cdot 360°) =$

$= \ldots = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Это свойство позволяет свести нахождение значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла к нахождению их значений для неотрицательного угла, меньшего 360°.

Пример: 2. Вычислим значение выражения: 1) $\sin 1470°$; 2) $\cos(-1845°)$.

Решение. Найдем, сколько полных углов содержит угол:

1) $1470°$. Для этого выполним деление: $1470° : 360°$. Получим 4 и в остатке $30°$. Значит, $1470° = 360° \cdot 4 + 30°$.

Тогда

$$\sin 1470° = \sin(360° \cdot 4 + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

2) $-1845°$. Для этого выполним деление: $1845° : 360°$. Получим 5 и в остатке $45°$.

Значит, $-1845° = -360° \cdot 5 - 45°$.

$\cos(-1845°) = \cos(-360° \cdot 5 - 45°) = \cos(-45°) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$, поскольку $\cos(-45°) = \cos 45°$

(рис. 40).

Ответ: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

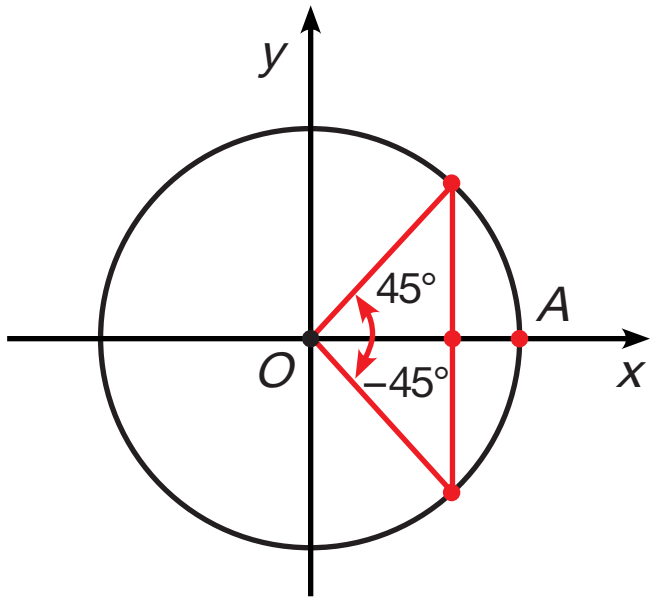


Рис. 40

Функции, обладающие рассмотренным выше свойством, называют **периодическими функциями**.

Функция $y = f(x)$ называется периодической функцией, если существует такое отличное от нуля число $T > 0$, что для любого $\boldsymbol{x}$ из области определения функции $y = f(x)$ выполняется равенство: $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Такое наименьшее число T называется **периодом функции**.

Следовательно, функции $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tgx$; $y = ctgx$ являются периодическими функциями.

Не следует думать, что периодическими бывают только тригонометрические функции. Функция $y = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа $\boldsymbol{x}$ (наибольшее целое число, не превосходящее $\boldsymbol{x}$), позволяет определить функцию $y = \{x\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа $\boldsymbol{x}$. По определению $\{x\} = x - [x]$ (например, $\{3,7\} = 0,7$;

$\{-6\} = 0$; $\{-4{,}2\} = -4{,}2 - (-5) = 0{,}8$). Дробная часть числа — функция с периодом $T = 1$.

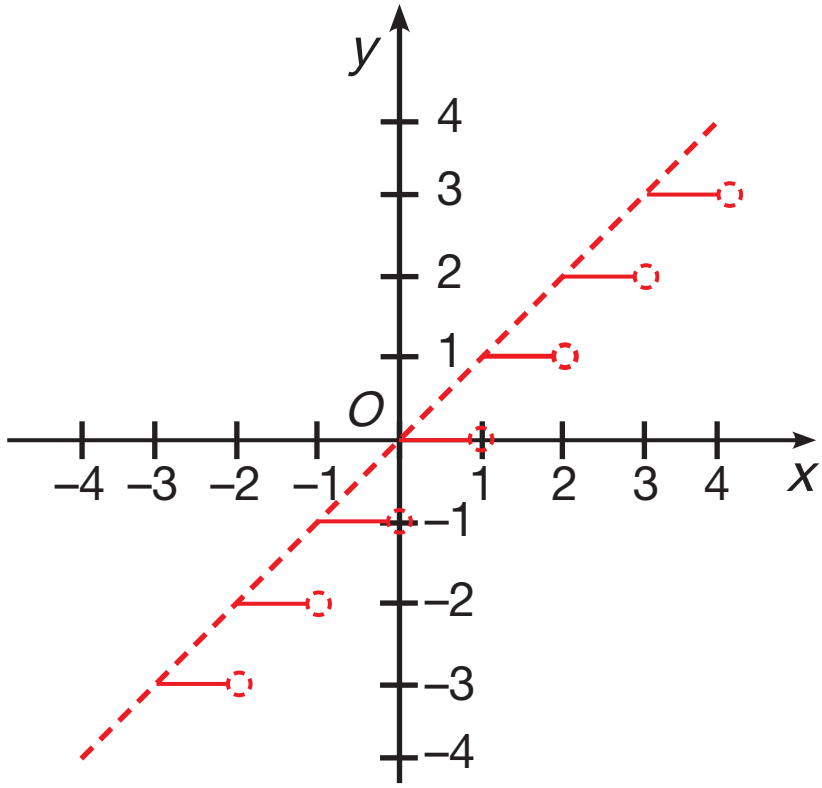


Рис. 41

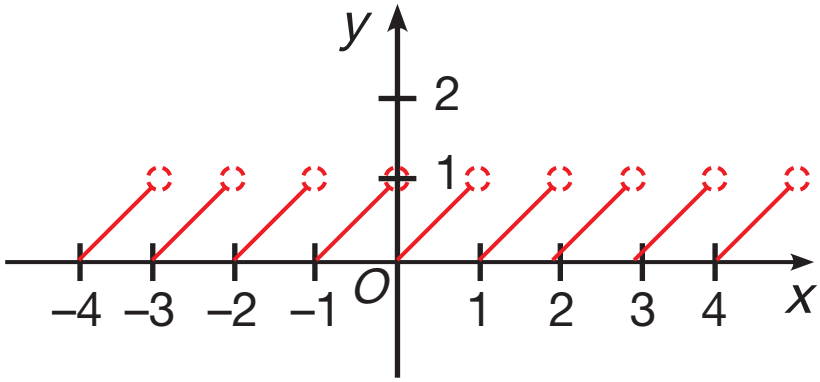


Рис. 42

Целая часть числа также называется **Антье** от x и обозначается $E(x)=[x]$. График $E(x)=[x]$ изображен на рисунке 41. Дробная часть числа $y=\{x\}=x-[x]$, ее график изображен на рисунке 42.

Четность тригонометрических функций

В прямоугольной системе координат рассмотрим окружность с центром в начале координат и с радиусом OA.

Предположим, что при повороте радиуса OA на угол α он переходит в радиус OB, при повороте радиуса OA на угол $-\alpha$, он займет положение OB_1 (рис. 43).

Если соединить точки B и B_1, то получим равнобедренный треугольник OBB_1. OP является биссектрисой угла BOB_1 этого треугольника, поэтому точки B и B_1 будут симметричны относительно оси Ox.

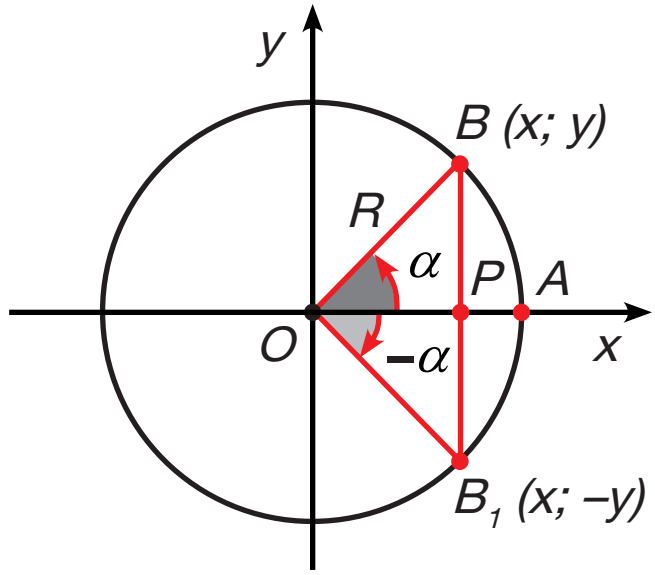


Рис. 43

Вы знаете

Точки, симметрично расположенные относительно оси Ox, имеют одинаковые абсциссы и противоположные ординаты.

Если координаты точки B обозначим через $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то координатами точки B_1 будут $\boldsymbol{x}$ и $-y$.

Тогда

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{R} = -\sin\alpha; \qquad tg(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -tg\alpha;$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{R} = \cos\alpha; \quad ctg(-\alpha) = \frac{x}{-y} = -ctg\alpha.$$

Получили равенства:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$tg(-\alpha) = -tg\alpha;\ ctg(-\alpha) = -ctg\alpha.$$

Вы знаете

Если для любого $\boldsymbol{x}$ из области определения функции, которая симметрична относительно начала координат, имеет место $f(-x) = f(x)$, то функция называется **четной**; если же имеет место $f(-x) = -f(x)$, то функция называется **нечетной**.

Из выше полученных равенств можно сделать вывод о том, что функции $y = \sin x$; $y = tgx$; $y = ctgx$ являются **нечетными** функциями, а функция $y = \cos x$ является **четной** функцией.

Пример: 3. Используя свойства четности тригонометрических функций, найдем значения выражений: $\sin(-60°)$; $\cos(-60°)$; $tg(-45°)$; $ctg(-30°)$.

Решение. $\sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$; $tg(-45°) = -tg\,45° =$

$= -1$; $ctg(-30°) = -ctg\,30° = -\sqrt{3}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; -1; $-\sqrt{3}$.

?

1. Существует ли такой угол, для которого верно равенство: $\sin\alpha = 2$; $\cos\alpha = -0{,}0001$; $tg\alpha = 1000000$?

2. В какой четверти знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса одинаковые?

3. Какова связь между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противоположных углов?

4. Может ли синус отрицательного угла быть положительным? Приведите пример.

A

10.1. Какие знаки имеют значения выражений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, если:

1) $\alpha = 67°$;
2) $\alpha = 127°$;
3) $\alpha = 267°$;
4) $\alpha = 319°$?

10.2. Найдите знак значения выражения:

1) $\sin 79°$;
2) $\sin 187°$;
3) $\cos 145°$;
4) $\cos 235°$;

5) $tg123°$;

6) $tg247°$;

7) $\sin 88° \cos 124°$;

8) $\sin 128° \cos 224°$;

9) $\sin 280° \cos 254°$;

10) $\sin 258° \cos 184°$.

10.3. В какой четверти находится угол α, если:

1) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$;

2) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$;

3) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$;

4) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$;

5) $\sin\alpha < 0$ и $tg\alpha > 0$;

6) $tg\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$?

10.4. Найдите знак значения выражения:

1) $\sin\frac{3\pi}{5}$;

2) $\sin\frac{7\pi}{4}$;

3) $\cos\frac{13\pi}{3}$;

4) $\cos\frac{31\pi}{7}$;

5) $tg\frac{15\pi}{4}$;

6) $ctg\frac{36\pi}{11}$;

7) $\sin 2{,}7\pi$;

8) $\sin(-1{,}4\pi)$;

9) $\cos(-3{,}5\pi)$;

10) $\cos(-5{,}6\pi)$;

11) $tg(-4{,}2\pi)$;

12) $ctg(-5{,}2\pi)$.

10.5. Сравните значения выражений:

1) sin0,6 и sin4,8;
2) sin1,6 и sin5,4;
3) cos1,96 и cos5,8;
4) cos1,2 и sin3,8.

10.6. Запишите в порядке возрастания значения выражений:

1) $\sin\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{5\pi}{6}$; $\sin\frac{4\pi}{3}$;

2) $\cos\frac{\pi}{4}$; $\cos\frac{5\pi}{6}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $tg\frac{\pi}{3}$; $tg\frac{5\pi}{6}$; $tg\frac{5\pi}{4}$.

10.7. Известно, что функция $f(x)$ задана на множестве R. При $x = 2$ имеем $f(2 + a) = f(2)$ и при $x = 5$ имеем $f(5 + a) = f(5)$. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ периодическая и имеет период $T = a$?

10.8. Найдите знак значения разности:

1) $\sin 30° - 2\cos(-60°)$;

2) $2tg225° - \cos 45°$;

3) $3\cos 270° - ctg250°$;

4) $4\sin 60° - ctg(-60°)$.

10.9. Найдите знак значения числового выражения:

1) $\sin 45° \cdot \cos 120° \cdot tg135°$;

2) $\sin 60° \cdot \cos 180° \cdot ctg135°$;

3) $\sin 215^\circ \cdot \cos 150^\circ \cdot tg\,255^\circ$;

4) $tg\,145^\circ \cdot \cos 220^\circ \cdot tg\,135^\circ$.

10.10. Докажите неравенство:

1) $\cos^2 \alpha < \cos \alpha$, если $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;

2) $\cos^2 \alpha > \cos \alpha$, если $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

3) $\sin^2 \alpha < \sin \alpha$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

4) $\sin^2 \alpha > \sin \alpha$, если $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

10.11. В какой координатной четверти может находиться угол α, если:

1) $|\sin \alpha| = \sin \alpha$;

2) $|\sin \alpha| > \sin \alpha$;

3) $|\cos \alpha| = \cos \alpha$;

4) $|\cos \alpha| > \cos \alpha$;

5) $|tg\alpha| = tg\alpha$;

6) $|tg\alpha| > tg\alpha$;

7) $|ctg\alpha| = ctg\alpha$;

8) $|ctg\alpha| > ctg\alpha$?

10.12. Найдите знак выражения:

1) $1-\sin 215^\circ \cos 135^\circ \, tg\, 229^\circ$;

2) $\sin 320^\circ \cos 285^\circ \, tg\, 30^\circ - 2$.

10.13. Известно, что функция $y = f(x)$ имеет период $T = 3$. Найдите период функции:

1) $y = f(x) + 5$;

2) $y = f(x) - 3$;

3) $y = 2f(x)$;

4) $y = -f(x)$.

10.14. Найдите углы в параллелограмме, если значение косинуса одного из его углов равно:

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) –0,5;

4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.15. Найдите углы в параллелограмме, если значение тангенса одного из его углов равно:

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\sqrt{3}$;

3) -1;

4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10.16. Найдите углы в равнобокой трапеции, если значение косинуса одного из ее углов равно:

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $-0{,}5$;

4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C

10.17. Докажите, что если $0° < \alpha < 90°$, то $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

10.18. Докажите, что для любого угла справедливо неравенство:
$|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geq 1$.

10.19. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $1 + 3\sin 2x$;
2) $3 - 2\sin 3x$;
3) $4 - 3\cos 2x$;
4) $2 - 0{,}5\cos x$.

10.20. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $1 + \sin^2 2x$;
2) $4 - \sin^4 3x$;
3) $4 - 3|\cos 2x|$;
4) $2{,}4 - 0{,}5\cos^2 x$.

П

10.21. Постройте график функции и укажите множество ее значений:

1) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 4}$;

2) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$;

3) $y = \dfrac{2x^2}{x}$;

4) $y = \dfrac{2(x-1)^2}{x - 1}$.

10.22. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ xy = 9. \end{cases}$

10.23. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x - a}{x^2 + ax + a^2} \cdot \dfrac{x^3 - a^3}{a^2 - x^2} : \left(1 - \dfrac{1 + a}{a}\right)$;

2) $\left(\dfrac{4b + a}{2b} + \dfrac{6b}{a - 4b}\right) \cdot \left(\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{4b^2 - a^2} + 1\right)$.

10.24. Значение суммы катетов прямоугольного треугольника равно 79 см. Если длину одного из катетов увеличить на 23 см, другой уменьшить на 11 см, то полученный прямоугольный и данный треугольники будут иметь одинаковые длины гипотенуз. Найдите длины катетов данного треугольника.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

10.25. Проверьте тождество:

1) $\sin^2 60° + \cos^2 60° - tg45° = 0$;

2) $\sin^2 45° + \cos^2 45° - ctg45° = 0$.

10.26. В каких четвертях $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ принимают значения:

1) одного знака;
2) разных знаков?

ГЛОССАРИЙ

Аналитический способ задания числовой последовательности	Числовая последовательность задана аналитическим способом, если она задана с помощью формулы n-го члена (говорят также — общего члена).
Арифметическая прогрессия	Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом d, называется **арифметической прогрессией**. Число d называется **разностью арифметической прогрессии**.
Бесконечная числовая последовательность	Если числовая последовательность (функция) задана на множестве всех натуральных чисел, то она называется **бесконечной числовой последовательностью**.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	Геометрическая прогрессия со знаменателем $\|q\| < 1$ называется **бесконечно убывающей геометрической прогрессией**.
Возрастающая последовательность	Последовательность (a_n) называется возрастающей, если каждый ее член a_n больше предыдущего a_{n-1}.
Геометрическая прогрессия	Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же, неравное нулю число, называется **геометрической прогрессией**.
Графический способ задания числовой последовательности	График числовой последовательности состоит из изолированных точек, абсциссы которых — натуральные числа, ординаты — члены

	последовательности, соответствующие своим номерам.
Знаменатель геометрической прогрессии	Число, на которое надо умножить член геометрической прогрессии, чтобы получить последующий ее член, называется **знаменателем геометрической прогрессии** и обозначается буквой q.
Конечная числовая последовательность	Если числовая последовательность (функция) задана на множестве первых ***n*** натуральных чисел, то она называется **конечной числовой последовательностью**.
Косинус угла α	**Косинусом угла** α называется отношение абсциссы точки B, лежащей на окружности, к ее радиусу.
Котангенс угла α	**Котангенсом угла** α называется отношение абсциссы точки B, лежащей на окружности, к ее ординате.

Математическая индукция	Математическая индукция — в математике — один из методов доказательства. Используется, чтобы доказать справедливость некоторого утверждения для всех натуральных чисел. Если утверждение $A\ (n)$, содержащее натуральную переменную, верно при $n = 1$, и из того, что оно верно при $n = k$, следует, что оно верно и при $n = k + 1$, то оно будет верно при всех натуральных значениях $\boldsymbol{n}$.
Монотонные последовательности	Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются **монотонными последовательностями**.
Неубывающая последовательность	Последовательность (a_n) называется неубывающей, если каждый ее член a_n больше или равен предыдущему — a_{n-1}.

Невозрастающая последовательность	Последовательность (a_n) называется **невозрастающей**, если каждый ее член a_n меньше или равен предыдущему — a_{n-1}.
Ограниченная последовательность	Если последовательность ограничена сверху и снизу, то последовательность (a_n) называется **ограниченной**.
Ограниченная сверху последовательность	Если существует такое число, что каждый член последовательности (a_n) меньше него, то последовательность (a_n) называется **ограниченной сверху**.
Ограниченная снизу последовательность	Если существует такое число, что каждый член последовательности (a_n) больше него, то последовательность (a_n) называется **ограниченной снизу**.

Периодическая функция	Функция $y = f(x)$ называется **периодической функцией**, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции $y = f(x)$ выполняется равенство: $f(x + T) = f(x)$. Такое наименьшее число называется **периодом функции**.
Постоянная (стационарная) последовательность	Последовательность (a_n) называется **постоянной** (**стационарной**), если каждый ее член a_n равен предыдущему — a_{n-1}.
Признак арифметической прогрессии	Свойство членов арифметической прогрессии, выраженное формулой $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, является **признаком арифметической прогрессии**.

Признак геометрической прогрессии	Свойство членов геометрической прогрессии, выраженное формулой $b = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, является **признаком геометрической прогрессии**.
Радиан	Величина центрального угла, опирающегося на дугу, равной длине радиуса окружности, называется 1 **радианом**.
Рекуррентный способ задания числовой последовательности	**Рекуррентный способ** задания числовой последовательности заключается в том, что любой член числовой последовательности, начиная с некоторого члена, выражается через предшествующие члены. При этом задается один или несколько первых членов последовательности и формула для нахождения членов числовой последовательности по известным предшествующим членам.

Синус угла α	**Синусом угла** α называется отношение ординаты точки B, лежащей на окружности, к ее радиусу.
Словесный способ задания числовой последовательности	С помощью этого способа закономерность расположения членов последовательности описывается словами.
Тангенс угла α	**Тангенсом угла** α называется отношение ординаты точки B, лежащей на окружности, к ее абсциссе.
Убывающая последовательность	Последовательность (a_n) называется **убывающей**, если каждый ее член a_n меньше предыдущего a_{n-1}.
Формула n-го члена арифметической прогрессии	Формула $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ называется **формулой n-го члена арифметической прогрессии**.

Формула ***n***-го члена геометрической прогрессии	Формула $b_n = b_1 q^{n-1}$ называется формулой ***n***-го члена **геометрической прогрессии**.
Формула ***n***-го члена числовой последовательности	**Формула *n*-го члена (общего члена)** — это формула, по которой можно найти любой член числовой последовательности, зная его номер.
Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии	$S = \frac{b}{1-q}$ — формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой $\lvert q \rvert < 1$.
Формула суммы первых ***n*** членов арифметической прогрессии	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$ $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ — формула суммы первых ***n*** членов арифметической прогрессии.

Формула суммы первых ***n*** членов геометрической прогрессии	$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ — формула суммы первых ***n*** членов геометрической прогрессии.
Числовая окружность	**Числовой окружностью** называется окружность, на которой указана начальная точка, единичная дуга, положительное направление.
Члены последовательности	Числа, образующие последовательность, называются **членами последовательности**.

ОТВЕТЫ

Упражнения для повторения курса алгебры для 9 классов

2. 1) 5; 2) –2; 3) 0; 4) –2. **3.** 3) 10; 4) 5. **4.** 1) $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1] \cup [0{,}2; 8) \cup (8; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1) \cup [5; +\infty)$; 7) $\left[-2\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$; 8) $(-\infty; -1 - \sqrt{6}] \cup [-1 + \sqrt{6}; +\infty)$. **5.** 1) (1; 9,3). **6.** 1) $[-5; 6] \cup [10; +\infty)$; 2) $(-\infty; -11] \cup [-2; 7]$; 3) $(-\infty; -5] \cup (6; +\infty)$; 4) (–2; 7]; 5) (7; 14]; 6) (–6; –3]; 7) (1; 2) ∪ (2; 3); 8) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-1; +\infty)$. **7.** 1) $(-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$. **8.** 1) $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2{,}5; +\infty)$; 2) $(-9; \frac{3}{4})$. **9.** 1) 1; 2) 3. **10.** 1) 8; 2) 8. **11.** 1) –8; 2) –6. **12.** 1) –6; 2) 4. **13.** 1) $(12; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4]$. **14.** 1) 4; 7; 2) –18. **15.** 1) $(-6; -5] \cup [5; +\infty)$; 2) [–2; 2]; 3) [–1; 4). **16.** 1) 3; 2) {–3; –2; –1}. **18.** (0; –0,4) и (4; 6). **19.** 1) (–0,5; 0,5); (0,5; –0,5); (–2; 1); (2; –1); 3) (–2; –4); (2;

4). **20.** 2) (0; 1); (3; 1); (1,5; 2,5); (1,5; –0,5); 4) (1; 2); (2; 1).

Глава I. Последовательности

1.1. 1) 2; 6; 10; 14; 18; 2) 1; 8; 15; 22; 29; 4) 8; 17; 26; 35; 44. **1.2.** 1) $\frac{1}{2}$; $2(\sqrt{2}-1)$; $1{,}5(\sqrt{3}-1)$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5(\sqrt{5}-1)}{4}$; 2) $\sqrt{3}+1$; $\frac{4(\sqrt{6}+1)}{5}$; 3; $\frac{8(\sqrt{12}+1)}{11}$; $\frac{5(\sqrt{15}+1)}{7}$; 4) $\frac{3}{2}$; $3(\sqrt{3}-1)$; $\frac{9(\sqrt{5}-1)}{4}$; $2(\sqrt{7}-1)$; $\frac{15}{4}$. **1.3.** $a_5 = 25$, $a_9 = 81$, $a_{12} = 144$. **1.4.** 1) $a_n = 2n$; 2) $a_n = 2n + 7$. **1.6.** $a_6 = 18$; $a_9 = -108$; $a_{14} = 154$. **1.7.** Возрастающие — 3), 5); убывающие — 1), 2), 6). **1.8.** 1) Да, $a_{10} = 17$; 3) да, $a_8 = -104$; 4) да, $a_9 = 13$. **1.9.** Возрастающие — 1, 3, 5; убывающие — 4, 6. **1.11.** 1) Убывающая; 2) возрастающая; 3) возрастающая; 4) возрастающая. **1.14.** 1) 1; 3; 5; 7; 9; 11; 2) 2; 3; 5; 9; 17; 33. **1.17**. 1) –36; 2) –40; 3) 4. **1.18.** 1) Наибольший $c_1 = -1{,}5$; 2) наибольший и наименьший члены последовательности указать нельзя; 3) наи-

больший $c_1 = 6$; наименьший член последовательности указать нельзя; 4) наименьший $c_1 = 8$; наибольший указать нельзя. **1.19.** 1) $a_n = n^3 - 1$; 2) $a_n = 3^{n+1} - 1$; 3) $a_n = 2^{2n-1} - 1$; 4) $a_n \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$. **1.20.** 17; 25; 32; 37; 47. **1.21.** 1) $\{2;\ \pm 3\}$; 4) $\{\pm 3\}$. **1.22.** 1) $\{(3;\ 6);\ (-3;\ -6)\}$. **1.23.** 1) 2; 2) 3; 3) 2; 4) 1. **1.24.** 1) $3\,ac$; 2) $\dfrac{4}{ac}$; 4) $\dfrac{3}{2c^2}$. **1.25.** 5 км/ч и 4 км/ч. **1.26.** 1) –13; –8; –3; 2; 7; 2) 11; 16; 21; 26; 31. **1.27.** 1) 5; 2) –53; 3) 7; 4) –11. **2.1.** Арифметическая прогрессия – 1, 4, 5, 7. **2.3.** 1) $a_7 = 9$; 2) $a_5 = -2{,}5$; 4) $a_9 = 8{,}76$. **2.5.** 1) 18 см; 2) 800 м/мин. **2.9.** 1) с 8-го по 12-й; 2) с 19-го по 38-й. **2.10.** 1) 8039; 2) 6058. **2.11.** 1) Является, $n = 21$; 2) не является; 3) является, $n = 65$. **2.12.** 1) $c_1 = -37$; $d = 5$; 2) $c_1 = -72$; $d = 8$; 3) $c_1 = -21{,}8$; $d = 2{,}5$; 4) $c_1 = 32{,}2$; $d = -1{,}8$. **2.13.** 1) 17; 2) 5; 3) 8. **2.18.** 1) 7; 10; 13; 2) 3,75; 9,5; 15,25. **2.19.** 1) 3; 2) 3. **2.22.** 1) Да, $n = 37$; 2) нет; 3) да, $n = 297$. **2.23.** 1) 3—20; 2) 4—14; 3) 4—7; 4) 8—11. **2.25.** 21. **2.26.** 1) $(-\infty;\ -3) \cup (3;\ +\infty)$;

3) $(-\infty;\ -2]\cup[1;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$. **2.27.** 1) $(-\infty;\ -1)\cup$ $\cup\{4\}$. **2.28.** 1) $\{-3\pm\sqrt{2}\}$; 2) $\{4,\ 8\}$. **2.29.** 1) Да, 38; 2) нет, –375; 3) нет, 624; 4) да, 16. **2.30.** 0. **3.1.** 1) 12 870; 2) –4059; 3) 16 137; 4) 99. **3.2.** 1) 44 и 343; 2) 173 и 2220; 3) 193 и 2208; 4) 136,7 и 1229,3. **3.3.** 1) $n=9$ и $S_9=135$; 2) $n=11$ и $S_{11}=484$; 3) $n=21$ и $S_{21}=264{,}6$; 4) $n=10$ и $S_{10}=-190$. **3.4.** 1) 12 или 14; 2) 12; 3) 17; 4) 11. **3.5.** 1) 5; 2) –2; 4) –4. **3.7.** 1) 0,5; 4) 0,7. **3.8.** 1) 670; 3) –168; 4) –1209,3. **3.9.** 1) $n(n+1)$; 3) $\frac{3n(n+1)}{2}$; 4) $\frac{5n(n+1)}{2}$. **3.10.** 1) $n=7$. **3.11.** 1) –950; 2) –1143; 4) 392. **3.12.** 1) $a_1=8$, $n=18$; 3) $a_1=5$, $n=26$; 4) $a_1=10$, $n=5$. **3.13.** 1) $a_n=5n+3$, $S_n=\frac{n}{2}\cdot(5n+11)$; 3) $a_n=18-2n$, $S_n=n\cdot(17-n)$. **3.14.** 1) 10; 2) 12. **3.15.** 1) 5; 18. **3.16.** 1) 1665; 2) 728. **3.18.** 1) 61 376; 2) 37 674. **3.19.** 1) 99 090; 2) 19 746. **3.20.** 657. **3.21.** 1) –35,1; 2) 42,9. **3.22.** 1) $\frac{23}{3}$, $\frac{253}{3}$; 2) 21, 399. **3.23.** 407,5. **3.24.** 1) 45,1 м; 2) 127,5 м; 3) 64,7 м;

4) 247,1 м. **3.26.** 1) $\{-1\}$; 2) $\left\{\frac{1}{3};\ -2\right\}$. **3.28.** 1) $\{(-2;\ -4),\ (4;\ 8)\}$; 2) $\{(-3;\ 1),\ (3;\ -1)\}$. **3.29.** 11 см и 8 см. **3.31.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) $\frac{1}{32}$; 4) –1024. **4.5.** 4) $-1-\sqrt{2}$. **4.7.** 216. **4.8.** $9\sqrt{3}$. **4.9.** –2; –4; –8; 16; –32. **4.10.** $\sqrt{3}$; 3; $3\sqrt{3}$; 9; $9\sqrt{3}$ или $\sqrt{3}$; –3; $3\sqrt{3}$; –9; $9\sqrt{3}$. **4.12.** а) 4. **4.13.** 1) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$; 2) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. **4.14.** а) $b_2=\frac{1}{27}$, $b_3=-\frac{1}{3}$, $b_5=-27$, $b_6=243$; б) $a_1=0{,}072$, $a_3=7{,}2$, $a_4=72$, $a_6=7200$. **4.15.** 16; $\frac{1}{2}$ или 2; –3. **4.16.** 1) $n=4$; 2) нет; 3) $n=6$; 4) нет. **4.17.** 1) $n=13$; 2) $n=9$. **4.18.** 1) 45 и 135; 2) 18, 9 и 4,5. **4.19.** 1) 121 тыс. тг; 2) 251 942,4 тг. **4.20.** 1) Во втором банке больше примерно на 341 тг; 2) 266 200 тг. **4.21.** 3, 9, 27, 81. **4.22.** 1) ± 39; 2) $\pm 4{,}8$. **4.23.** 1) 2, 8, 32 или 32, 8, 2; 2) 1, 4, 16

или 16, 4, 1. **4.24.** 1, 3, 9 или 9, 3, 1. **4.25.** 0,2; 1; 5; 25. **4.26.** 3; 7; 1. **4.27.** 1; $3\pm2\sqrt{2}$. **4.28.** 32; 16; 8; 0 или 2; 6; 18; 30. **4.29.** 1) 1; 2) $\pm2\sqrt{2}$. **4.30.** 1) 21 576; 2) 16 665. **4.31.** 1) 0,25; 2) –1,75. **4.33.** 1) 1; 2) 0; 3) –17; 4) 6. **4.34.** 1) $b_3 = 4$; 2) $b_6 = -0{,}5$; 3) $b_7 = 0{,}25$; 4) $b_{10} = \frac{1}{32}$. **4.35.** 22. **5.1.** 1) $n = 10$, $S_{10} = 1023$; 2) $n = 5$, $S_5 = 155$; 3) $n = 5$, $S_5 = 363$. **5.3.** 3) $q = 2$, $n = 6$; 4) $q = 3$, $n = 5$. **5.5.** 3) $n = 4$, $b_n = -\frac{3}{40}$; 4) $n = 3$, $b_n = -1{,}17$. **5.6.** 3) $b_1 = 3$, $S_n = \frac{45}{8}$; 4) $b_1 = \frac{1}{9}$, $S_n = \frac{65}{72}$. **5.7.** 1) $b_1 = 1$, $b_n = 1024$; 2) $b_1 = 81$, $b_n = 1$. **5.8.** 1) $b_1 = 48$, $n = 5$; 3) $b_1 = 0{,}125$, $n = 6$; 4) $b_1 = 81$, $n = 6$. **5.9.** 1) 129 : 1; 2) 512 : 513. **5.10.** 1) 242 000 тг; 2) 18 818 тг. **5.11.** 1) 890; 2) 4953. **5.12.** 1) 192; 2) 468. **5.15.** 1) 2; 2) 4. **5.16.** 188 238 тг. **5.17.** 1) $b_1 = 1$ и $S_5 = 121$; 2) $b_1 = 2$ и $S_5 = 682$. **5.18.** 1) $n \geq 10$; 2) $n \geq 11$. **5.19.** 6,2. **5.20.** 10. **5.21.** –9. **5.22.** 1) 2; 254. **5.23.** 30. **5.24.** – 54; 18; –6; 2 или 2, –6; 18; –54. **5.25.** –1. **5.26.** 1) (–4; 11); 2) $(-\infty;\ -2) \cup (18;\ +\infty)$. **5.27.** 1) $(2;\ +\infty)$;

2) $(-\infty;\ -1\frac{9}{16})$. **5.28.** 1) 16 900; 2) 10 100. **5.30.** 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5. **5.31.** 1) $S_{11} = 2047$; 2) $S_5 = 121$. **5.32.** 1) $q = -2$; 2) $q = -\frac{1}{3}$. **6.1.** 1) 1,5; 2) $-\frac{125}{4}$; 3) 7,2. **6.2.** 1) $-\frac{70}{3}$; 2) $\frac{64}{3}$. **6.3.** 1) $\frac{4}{7}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{1000}{11}$. **6.5.** 1) 1,5; 2) $1{,}5 \cdot (\sqrt{3}+1)$; 3) $2\sqrt{2}-2$; 4) 0,3; 5) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; 6) $\frac{5(\sqrt{5}-1)}{4}$. **6.7.** 1) 40,5; 2) 781,25. **6.8.** 6; 3; 1,5; … **6.12.** $\frac{16}{3}$. **6.13.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) 0,2. **6.14.** 0,125. **6.15.** $32(2+\sqrt{2})$ см; 128 см^2. **6.16.** 48 см; $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ см^2. **6.17.** 0,5. **6.18.** $\frac{4}{9}$. **6.19.** 1) $\frac{c^2}{1-q^2}$; 2) $\frac{c^2(1+q)^2}{1-q^4}$. **6.20.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **6.21.** 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; … .

6.22. 3,5. **6.23.** $b_1 = 12$, $q = 0{,}5$. **6.24.** $b_1 = 2$, $q = 0{,}75$. **6.25.** 1) –9; 16; 2) –4; 6. **6.28.** 180°. **6.29.** 2100. **6.32.** $\frac{5}{11}$. **7.6.** 1) $n^2 \cdot (n+1)$; 2) $n \cdot (n+1)^2$. **7.8.** 1) $\frac{n}{2n+1}$; 2) $\frac{n}{3n+1}$. **7.20.** 62 500 тг. **7.21.** 63. **7.22.** 60. **7.23.** 2; 14; 98. **7.24.** 1) $\left\{-1; 0, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$; 2) $\{-2{,}5; -2; 0{,}5; 1\}$. **7.25.** 1) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1] \cup (2{,}5; 3]$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; 2] \cup (2\frac{1}{3}; 3)$.

Глава II. Тригонометрия

8.6. 1) IV четверть; 2) I четверть; 3) III четверть; 4) II четверть. **8.7.** 1) $0{,}2\pi$; $0{,}8\pi$; $0{,}2\pi$; $0{,}8\pi$; 2) $0{,}7\pi$; $0{,}3\pi$; $0{,}7\pi$; $0{,}3\pi$. **8.8.** 1) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$. **8.10.** 1) $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 1$;

2) $\alpha = 0{,}3\pi + 2\pi \cdot 7$; 4) $\alpha = 0{,}3\pi + 2\pi \cdot (-10)$.

8.11. 1) IV четверть; 2) I четверть; 3) II четверть; 4) I четверть. **8.14.** 1) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{7\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{18}$. **8.15.** 1) Да; 2) нет, не всегда; 3) да; 4) нет, не всегда. **8.16.** 219 оборотов. **8.17.** 1) 1080° или 6π рад; 4) 8640° или 48π рад. **8.20.** 1) $(-\infty; \frac{3-\sqrt{33}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{33}}{2}; +\infty)$; 4) [–1,5; 2]. **8.23.** 1) $\sqrt{3}-3$; 2) –2; 3) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; 4) $2-\sqrt{3}$. **9.4.** 1) $1+\sqrt{2}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}-2}{2}$; 3) –2,5; 4) $\frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{6}$. **9.5.** 1) $3\sqrt{3}$; 3) $1{,}5+\sqrt{2}$; 4) –3. **9.6.** 1) $a_1 = 180°$; $a_2 = 360°$; $a_3 = 720°$; 2) $a_1 = 30°$; $a_2 = 150°$; $a_3 = 390°$; 5) $a_1 = 90°$; $a_2 = -90°$; $a_3 = 450°$. **9.8.** 1) $5-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) –1; 3) 0. **9.9.** 1) $\beta = \frac{\pi}{2}$;

$\beta = \frac{3\pi}{2}$; $\beta = \pi$; 2) $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{3\pi}{2}$.

9.10. 2) 0. **9.11.** 1) 2. **9.12.** 1) 0,75; 3) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

9.14. 1) sin60° + sin30°; 2) cos30°+ cos60°. **9.15.** 1) sin60° – sin45°; 2) cos30° + cos45°. **9.16.** 1) tg30° – tg45°; 2) ctg60° – ctg45°.

9.17. 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; 4) $-\sqrt{2}$. **9.18.** 1) $-(2+\sqrt{3})$;

2) –14; 3) –1; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.19.** 1) π; 3π; 4π; 2) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$;

3) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4}$. **9.20.** Является. **9.23.** 1) $3+\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $2-\sqrt{3}$. **9.24.** 1) 2; 2) $\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$. **9.25.** 1) Нет, не всегда; 2) $\alpha = 150°$; $\alpha = 390°$; 3) $\alpha = (-1)^n \cdot$

$\cdot 30° + 180° \cdot n$, $n \in Z$. **9.26.** 1) Нет, не всегда;

2) $\alpha = -45°$; $\alpha = 315°$; 3) $\alpha = \pm 45° + 360° \cdot n$,

$n \in Z$. **9.27.** 1) Нет; 2) нет; 3) нет; 4) да. **9.29.** 1) III четверть; 2) II четверть. **9.30.** 1) Да; 2) да;

3) нет; 4) да. **9.32.** 1) $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$; $x_1 \cdot x_2 = -9$;

2) $x_1 + x_2 = 1{,}4$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{6}{25}$. **9.33.** 1) 0; 2) 4;

3) 0. **9.35.** 1) 2; 3; 2) 4; 5; 6;... . **9.37.** Отец — 10 ч, сын — 15 ч. **9.38.** 1) $[-3;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 4]$;

3) $[-1;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ 2)$. **10.3.** 1) II четверть; 2) III четверть; 3) IV четверть; 5) III четверть; 6) III четверть. **10.4.** 1) +; 2) –; 6) +; 8) +; 9) 0; 10) +; 12) –. **10.7.** Нельзя. **10.8.** 1) –; 2) +; 3) –; 4) +. **10.9.** 1) +; 2) +; 3) +; 4) –. **10.11.** 1) I и II четверть; 2) III и IV четверти; 4) II и III четверти; 6) II и IV четверти; 8) II и IV четверти. **10.12.** 1) +; 2) –. **10.13.** 1) – 4) $T = 3$. **10.14.** 1) 30°; 150°; 30°; 150°; 3) 60°; 120°; 60°; 120°. **10.15.** 3) 45°; 135°; 45°; 135°; 4) 30°; 150°; 30°; 150°. **10.16.** 3) 60°; 120°; 120°; 60°; 4) 30°; 150°; 150°; 30°. **10.19.** 1) 4 и –2; 2) 5 и 1; 3) 7 и 1. **10.20.** 1) 2 и 1; 2) 4 и 3; 3) 4 и 1; 4) 2,4 и 1,9. **10.22.** 1) $(\pm 2;\ \pm 1)$; 2) (3; 3); (–3; –3). **10.23.** 1) a; 2) $\frac{5b-2a}{8b-2a}$. **10.24.** 16 см и 63 см. **10.26.** 1) в I и III четвертях; 2) в II и IV четвертях.

Содержание

Предисловие 5

Упражнения для повторения курса алгебры 9 классов 7

Глава I. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Числовая последовательность, ее виды, способы задания и свойства.... 17

§ 2. Арифметическая прогрессия. Формула ***n***-го члена арифметической прогрессии.....44

§ 3. Формула для вычисления значения суммы первых ***n*** членов арифметической прогрессии 71

§ 4. Геометрическая прогрессия. Формула ***n***-го члена геометрической прогрессии.....92

§ 5. Формула для вычисления значения суммы первых ***n*** членов геометрической прогрессии 120

§ 6. Формула для вычисления значения суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии 139

§ 7. Метод математической индукции 157
Проверь себя! 177

Глава II. ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 8. Градусная и радианная мера углов и дуг 183
§ 9. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов.....212
§ 10. Тригонометрические функции и их свойства.....249
Глоссарий 279
Ответы 289

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Корчевский Владимир Евгеньевич
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА

Часть 1

Учебник для учащихся 10 класса
с нарушением зрения (слабовидящих)
специальных школ (классов)

Редактор С. Родионова
Художественный редактор А. Сланова
Технический редактор И. Тарапунец
Компьютерная верстка Г. Алимшеевой,
Э. Айткуловой

Адаптировано на укрупненный шрифт
ТОО «Центр САТР»: И. Н. Колмакова

Подписано в печать 00.00.2022
Уч. изд. л. 00,0. Усл. печ. л. 00,0.
Формат 70x100 $^{1}/_{16}$. Печать офсетная

АЛГЕБРА 10

издательство МЕКТЕП